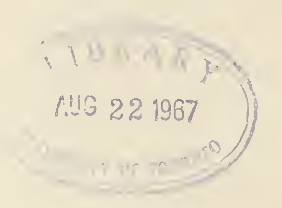

3 1761 06702063 6

GAUSS ALS GEOMETER

VON

PAUL STÄCKEL

Abdruck aus Heft 5 der *Materialien für eine wissenschaftliche Biographie von Gauss* gesammelt von F. KLEIN, M. BRENDEL und L. SCHLESINGER.
Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathem.-physik. Klasse. 1917.
Vorgelegt in der Sitzung vom 26. Oktober 1917.


AUG 22 1967

1.

Einleitung[1].

Gauss gehört zu den grossen Mathematikern, deren eigentümliche Begabung schon in der ersten Jugend durch ungewöhnliche Leistungen im Zahlenrechnen hervortrat. Auch während er das Collegium Carolinum zu Braunschweig besuchte (1792—1795), hat er viel gerechnet; schon im Jahre 1794 erfand er die Methode der kleinsten Quadrate. Auf umfangreiches numerisches Beobachtungsmaterial gründen sich auch die 1775 beginnenden Untersuchungen in der höheren Arithmetik, die 1801 in den *Disquisitiones arithmeticae* einen ersten Abschluss erhalten. Neben die zahlentheoretischen Untersuchungen treten in diesen Jahren höchster Schaffenskraft die Ent-

1) Verzeichnis der Abkürzungen.

W. für C. F. Gauss, Werke I—XI.

T. für das Wissenschaftliche Tagebuch, W. X 1, S. 488—572.

Br. G.-Sch. für Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher I—VI, Altona 1860—1865.

Br. G.-O. für Briefwechsel zwischen Gauss und Olbers, in W. Olbers, Sein Leben und seine Werke II 1 und II 2, Berlin 1900 und 1909.

Br. G.-Bessel für Briefwechsel zwischen Gauss und Bessel, Leipzig 1880.

Br. G.-Bolyai für Briefwechsel zwischen Gauss und W. Bolyai, Leipzig 1899.

P. Th. für P. Stäckel und F. Engel, Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss, eine Urkundensammlung zur Vorgeschichte der nichteuklidischen Geometrie, Leipzig 1895.

Bol. für W. und J. Bolyai, Geometrische Untersuchungen herausgegeben von P. Stäckel; I. Leben und Schriften der beiden Bolyai, II. Stücke aus den Schriften der beiden Bolyai, Leipzig 1913.

Lob. für N. Iw. Lobatschefskij, zwei geometrische Abhandlungen, aus dem Russischen übersetzt, mit Anmerkungen und mit einer Biographie des Verfassers von F. Engel, Leipzig 1898—99.

Sartorius für W. Sartorius v. Waltershausen, Gauss zum Gedächtniss, Leipzig 1856.

Bachmann für P. Bachmann, Über Gauss' zahlentheoretische Arbeiten, Materialien für eine wissenschaftliche Biographie von Gauss, Heft I, 1911; W. X 2, Abh. I.

Schlesinger für L. Schlesinger, Über Gauss' Arbeiten zur Funktionentheorie, Materialien usw., Heft III, 1912; W. X 2, Abh. II.

deckungen auf dem Gebiete der elliptischen Funktionen, und auch die Algebra gehört, wie das *Tagebuch*[1]) zeigt und die Dissertation (1799) bestätigt, zu den mathematischen Gegenständen, denen sich der junge GAUSS zuwendet. Im Vergleich zur Analysis steht die Geometrie im Hintergrunde; doch lässt eine Aufzeichnung im *Tagebuch* vom September 1799 (T. Nr. 99) schon die grosse Frage nach den Gründen der Geometrie anklingen.

Die nun einsetzende astronomische Periode, die sich bis etwa 1816 erstreckt, bringt nach Aussen hin keine wesentliche Änderung, denn unter den Veröffentlichungen kommen nur Beiträge zur elementaren Geometrie in Betracht. Nachlass und Briefwechsel zeigen jedoch, dass die Forschungen über die Grundlagen der Geometrie nicht geruht haben, und gerade in der Zeit zwischen 1810 und 1816 ist GAUSS zu den grundlegenden Begriffen und Sätzen aus der Lehre von den krummen Flächen gelangt.

Mit dem Jahre 1816 beginnt die Zeit der Geodäsie. Vorbereitet durch theoretische Arbeiten über die kürzesten Linien auf dem Sphäroide, betätigt sich GAUSS 1821 bis 1825 bei den Messungen im Felde. Den Weg zu Grösserem bahnend, verfasst er 1822 die Kopenhagener Preisschrift über die konforme Abbildung krummer Flächen, und 1828 erscheinen, als reife Frucht langer Mühen, die *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, in denen aus den Anwendungen heraus ein neuer Zweig der reinen Mathematik selbständiges Leben gewinnt.

Noch zu einer zweiten Reihe von Untersuchungen hat die geodätische Tätigkeit den Anstoss gegeben, zu sehr eingehenden Forschungen über die Grundlagen der Geometrie. Hier ist GAUSS nicht dazu gelangt, seine Gedanken ausführlich niederzuschreiben, und wir sind auf spärliche Notizen und einzelne Stellen in Briefen angewiesen.

Es folgt die Periode der mathematischen Physik. Als diese etwa 1841 geendet hat, kommt es zu einer Nachblüte der geometrischen Forschung. Es entstehen die beiden Abhandlungen über Gegenstände der höheren Geodäsie (1843 und 1846); die Grundlagen der Geometrie werden wieder aufgenommen und erweiterte Auffassungen gewonnen, geometrische Aufgaben verschiedener Art werden behandelt, und GAUSS kehrt auch zu zwei Gebieten zurück, die

1) Das von GAUSS während der Jahre 1799 bis 1815 geführte wissenschaftliche Tagebuch oder Notizenjournal ist abgedruckt W. X 1, S. 488—572; es wird im Folgenden mit T. angeführt.

ihn von jeher angezogen hatten und denen er hohe Bedeutung beimass: zur Geometria situs und zur geometrischen Versinnlichung der komplexen Grössen.

Wie SARTORIUS[1] berichtet (S. 80), hat GAUSS sich dahin geäussert, »in seiner frühesten Jugend habe ihm die Geometrie wenig Interesse eingeflösst, welches sich erst später bei ihm in hohem Masse entwickelt habe«. Die Arithmetik war und blieb ihm die »Königin der Mathematik«, deren Hofstaat die andern Zweige der Analysis angehörten. Gewiss war ihm das geometrisch-anschauliche Denken nicht fremd, aber bei seinen geometrischen Untersuchungen hat er fast überall die analytischen Methoden bevorzugt. »Es ist nicht zu leugnen«, heisst es in der Besprechung der *Géométrie descriptive* von MONGE (W. IV, S. 359), »dass die Vorzüge der analytischen Behandlung vor der geometrischen, ihre Kürze, Einfachheit, ihr gleichförmiger Gang, und besonders ihre Allgemeinheit, sich gewöhnlich um so entschiedener zeigen, je schwieriger und verwickelter die Untersuchungen sind«. Er war sich jedoch dessen wohl bewusst, dass »die logischen Hilfsmittel für sich nichts zu leisten vermögen und nur taube Blüten treiben, wenn nicht die befruchtende, lebendige Anschauung des Gegenstandes überall waltet« (W. IV, S. 366). Die Pflege der rein geometrischen Methoden hielt er für »unentbehrlich beim frühern jugendlichen Studium, um Einseitigkeit zu verhüten, den Sinn für Strenge und Klarheit zu schärfen und den Einsichten eine Lebendigkeit und Unmittelbarkeit zu geben, welche durch die analytischen Methoden weit weniger befördert, mitunter eher gefährdet werden« (W. IV, S. 360), und er wünschte, »dass auch die rein geometrischen Behandlungen fortwährend kultiviert werden und dass die Geometrie wenigstens einen Teil der neuen Felder, die die Analyse erobert, sich aneigne« (W. II, S. 186).

---

1) SARTORIUS VON WALTERSHAUSEN, *Gauss zum Gedächtnis*, Leipzig 1856; im Folgenden mit SARTORIUS angeführt.

Abschnitt I.
Die Grundlagen der Geometrie.

2.
Allgemeines über die Arbeitsweise von Gauss.

Bei den Grundlagen der Geometrie zeigt sich in hohem Masse eine Erscheinung, der wir bei Gauss wiederholt begegnen: der Reichtum der Gedanken, die ihm, besonders in der Jugend, in solcher Fülle zuströmten, dass er ihrer kaum Herr werden konnte (Sartorius, S. 78), steht in Gegensatz zu dem geringen Umfang dessen, was er aufgezeichnet, ausgearbeitet und veröffentlicht hat. Wenn daher auch der folgende Bericht über die Arbeitsweise von Gauss mehr in eine (noch fehlende) Schilderung seiner gesamten wissenschaftlichen Persönlichkeit als in eine Darlegung seiner Arbeiten auf einem Teilgebiet der Mathematik zu gehören scheint, so dürfte er doch als Grundlage für das Verständnis der folgenden Ausführungen nützlich sein, zumal dabei der Zusammenhang mit den Grundlagen der Geometrie nicht aus dem Auge verloren wird.

Ein erster Grund für die Erscheinung, auf die wir hingewiesen haben, liegt darin, dass die Grösse des mathematischen Genies, das sich in Gauss offenbarte, in der Vereinigung schöpferischer und kritischer Kraft wurzelt. Diese Eigentümlichkeit erkennt man schon in der Dissertation, und sie zeigt sich nicht weniger in den *Disquisitiones arithmeticae*. In den späteren Veröffentlichungen tritt die Kritik an den Leistungen anderer zurück, aber es bleibt als auszeichnendes Merkmal die »Gausssche Strenge«.

Die Gausssche Strenge erkennen wir schon äusserlich in der Form der Darstellung. »Es war zu aller Zeit Gauss' Streben, seinen Untersuchungen die Form vollendeter Kunstwerke zu geben; eher ruhete er nicht, und er hat daher nie eine Arbeit veröffentlicht, bevor sie diese von ihm gewünschte, durchaus vollendete Form erhalten hatte. Man dürfe einem Bauwerke, pflegte er zu sagen, nach seiner Vollendung nicht mehr das Gerüste ansehen« (Sartorius, S. 82). Dieser Grundsatz spricht sich auch in dem Siegel aus, das Gauss benutzte; es zeigt einen Baum mit wenigen Früchten und der Umschrift: Pauca, sed matura.

In Briefen an SCHUMACHER, ENCKE und BESSEL hat GAUSS sich darüber geäussert, warum er von dieser klassischen Darstellungsart nicht abgehen wollte und konnte.

Als er nach Abschluss der geodätischen Messungen im Felde im Winter 1825/26 seine theoretischen Arbeiten wieder aufnimmt, klagt er am 21. November 1825 SCHUMACHER gegenüber: »Der Wunsch, den ich immer bei meinen Arbeiten gehabt habe, ihnen eine solche Vollendung zu geben, ut nihil amplius desiderari possit[1]), erschwert sie mir freilich ausserordentlich« (W. VIII, S. 400). SCHUMACHER antwortet am 2. Dezember 1825: »In Bezug auf Ihre Arbeiten und den Grundsatz, ut nihil amplius desiderari possit, möchte ich fast wünschen, und zum Besten der Wissenschaft wünschen, Sie hielten nicht so strenge daran. Von dem unendlichen Reichtum Ihrer Ideen würde dann mehr uns werden als jetzt, und mir scheint die Materie wichtiger als die möglich vollendetste Form, deren die Materie fähig ist. Doch schreibe ich meine Meinung mit Scheu hin, da Sie gewiss längst das pro und contra möglichst erwogen haben« (Br. G.-SCH. II, S. 41). GAUSS erwiedert am 12. Februar 1826: »Ich war etwas verwundert über Ihre Äusserung, als ob mein Fehler darin bestehe, die Materie zu sehr der vollendeten Form hintanzusetzen. Ich habe während meines ganzen wissenschaftlichen Lebens immer das Gefühl gerade vom Gegenteil gehabt, d. i. ich fühle, dass oft die Form vollendeter hätte sein können und dass darin Nachlässigkeiten zurückgeblieben sind. Denn so werden Sie es doch nicht verstehen, als ob ich mehr für die Wissenschaft leisten würde, wenn ich mich damit begnügte, einzelne Mauersteine, Ziegel etc. zu liefern, anstatt eines Gebäudes, sei es nun ein Tempel oder eine Hütte, da gewissermassen das Gebäude auch nur Form der Backsteine ist. Aber ungern stelle ich ein Gebäude auf, worin Hauptteile fehlen, wenngleich ich wenig auf den äusseren Aufputz gebe. Auf keinen Fall aber, wenn Sie sonst mit Ihrem Vorwurf auch Recht hätten, passt er auf meine Klagen über die gegenwärtigen Arbeiten, wo es nur das gilt, was ich Materie nenne; und ebenso kann ich Ihnen bestimmt versichern, dass, wenn ich gern auch eine gefällige Form gebe, diese vergleichungsweise nur sehr wenig Zeit und Kraft in Anspruch nimmt oder bei früheren Arbeiten genommen hat« (Br. G.-SCH. II, S. 46).

1) Diese Wendung findet sich bei EULER, siehe z. B. Nova acta acad. sc. Petrop. 4 (1786), 1789, S. 73.

Als GAUSS bald darauf an SCHUMACHER eine kleine Abhandlung über den Heliotropen für die Astronomischen Nachrichten sendet (W. IX, S. 472), fügt er hinzu: »Diesmal habe ich gewiss den Vorwurf nicht verdient, als ob ich der Form auf Kosten der Materie zuviel eingeräumt hätte, sondern eher das Gegenteil« (Brief vom 28. November 1826, Br. G.-SCH. II, S. 81), und SCHUMACHER sieht sich jetzt veranlasst, seine Meinung ausführlich auseinanderzusetzen. Am Schluss heisst es: »Ich glaubte, dies Ausfeilen könne ebenso gut ein anderer tun, und darin kann ich mich geirrt haben; worin ich mich aber nicht geirrt habe, ist die Behauptung, dass Sie das Erfinden nicht einem andern übertragen können. Jedes Jahr Ihres Lebens mehrt die Ihnen nur verständlichen Andeutungen neuer Ideen. Soll alles dieses verloren sein?« (Brief vom 2. Dezember 1826, Br. G.-SCH. II, S. 83).

GAUSS verhielt sich solchen Anregungen gegenüber durchaus ablehnend.

»Ich weiss«, schreibt er am 18. August 1832 an ENCKE, »dass einige meiner Freunde wünschen, dass ich weniger in diesem Geiste arbeiten möchte: das wird aber nie geschehen; ich kann einmal an Lückenhaftem keine rechte Freude haben, und eine Arbeit, an der ich keine Freude habe, ist mir nur eine Qual. Möge auch jeder in dem Geiste arbeiten, der ihm am meisten zusagt« (W. XI 1, S. 84).

Am 15. Januar 1827 berichtet er seinem Freunde SCHUMACHER, er sei mit der Ausarbeitung der Abhandlung über die krummen Flächen ein gut Stück vorgerückt. »Ich finde dabei viele Schwierigkeiten, allein das, was man Ausfeilen oder Form mit Recht nennen könnte, ist doch keineswegs, was erheblich aufhält (wenn ich die Sprödigkeit der lateinischen Sprache ausnehme), vielmehr ist es die innige Verkettung der Wahrheiten in ihrem Zusammenhange, und eine solche Arbeit ist erst dann gelungen, wenn der Leser die grosse Mühe, die bei der Ausführung stattgefunden hat, gar nicht mehr erkennt. Ich kann daher nicht leugnen, dass ich keinen recht klaren Begriff davon habe, wie ich meine Arbeiten solcher Art anders, als ich gewohnt bin, ausführen könnte, ohne, wie ich mich schon einmal ausgedrückt habe, Mauersteine anstatt eines Gebäudes zu liefern. Ich habe wohl zuweilen versucht, über diesen oder jenen Gegenstand bloss Andeutungen ins Publikum zu bringen; entweder aber sind sie von Niemand beachtet oder wie z. B. einige Äusserungen in einer Rezension G. G. Anz. 1816, p. 619 [W. IV, S. 364,

VIII, S. 170), es ist mit Kot darnach geworfen. Also, insofern von wichtigen Gegenständen die Rede ist, etwas im Wesen Vollendetes oder gar nichts« (Br. G.-Sch. II. S. 93). Solche Andeutungen finden sich zahlreich in den Jugendwerken, sie fehlen aber auch nicht in den späteren Schriften. Wie sorgfältig Gauss dabei verfuhr, zeigt der Brief an Encke vom 18. August 1832, wo es heisst: »Es ist von jeher mein gewissenhaft befolgter Grundsatz gewesen, solche Andeutungen, die aufmerksame Leser in jeder meiner Schriften in grosser Menge finden (sehen Sie z. B. meine *Disquis. arithmet.* pag. 593 [art. 335]) stets dann erst zu machen, wenn ich den Gegenstand für mich selbst ganz abgemacht habe« (W. XI 1, S. 84). Hiernach wird man im besonderen die vorher erwähnten Andeutungen in den Göttinger Anzeigen vom Jahre 1816 zu bewerten haben, die sich auf die Unbeweisbarkeit des Parallelenaxioms beziehen.

Es ist ein merkwürdiger Zufall, dass Gauss bald, nachdem er sich bei Schumacher über die Erfolglosigkeit seiner Andeutungen beklagt hatte, am 24. Juli und 14. August 1827 (Br. G.-Sch. II, S. 105, 111) durch seinen Freund die beiden Briefe Jacobis erhielt, mit denen dessen Untersuchungen über die elliptischen Funktionen beginnen (Jacobi, Werke I, S. 29), und dass er nicht lange danach Abels *Recherches* kennen lernte, die ihm von seinen eigenen Untersuchungen »wohl ein Drittel vorwegnahmen« (Brief vom 30. Mai 1828, Br. G.-Sch. II, S. 177). Der ausschlaggebende Einfluss, den die berühmte Stelle im art. 335 der *Disquisitiones arithmeticae* (W. I, S. 412) auf Abel und Jacobi geübt hat, ist anerkannt. Hier hat ein von Gauss ausgestreutes Samenkorn hunderfältige Frucht getragen, und auch andere Andeutungen sind nicht auf steinigen Boden gefallen.

Fast ein Vierteljahrhundert später ist derselbe Streitpunkt zwischen den beiden Freunden noch einmal aufgetaucht, als nämlich Schumacher in den Astronomischen Nachrichten Jacobis Bearbeitung der Carlinischen Abhandlung über die Keplersche Gleichung abdruckte und Gauss jenem mitteilte (Brief vom 4. Dezember 1849, Br. G.-Sch. VI, S. 51), er habe die Aufgabe schon vor langer Zeit »auf eine ohne allen Vergleich kürzere Art aufgelöst« (W. X 1, S. 420—428). »Wenn ich nicht wüsste«, hatte Schumacher geantwortet, »wieviel Zeit Ihnen die letzte Feile Ihrer Arbeiten kostet, so würde ich um Ihre Abhandlung bitten« (Brief vom 5. Dezember 1849, Br. G.-Sch. VI, S. 52). Gauss erwidert, er sei nicht abgeneigt, eine ihm zu Teil werdende Musse

zur Ausarbeitung einer Abhandlung über den Gegenstand zu verwenden; es werde aber erhebliche Zeit erfordert werden, um die ganze Theorie in einer ihm selbst genügenden Gestalt auszuführen. »Sie sind ganz im Irrtum, wenn Sie glauben, dass ich darunter nur die letzte Politur in Beziehung auf Sprache und Eleganz der Darstellung verstehe. Diese kosten vergleichungsweise nur unbedeutenden Zeitaufwand; was ich meine, ist die innere Vollkommenheit. In manchen meiner Arbeiten sind solche Inzidenzpunkte, die mich jahrelanges Nachdenken gekostet haben, und deren in kleinem Raum konzentrierte Darstellung nachher niemand die Schwierigkeit anmerkt, die erst überwunden werden muss[te]« (Brief vom 5. Februar 1850, Br. G.-Sch. VI, S. 58).

Ähnliche Äusserungen finden sich in dem Briefe an Bessel vom 28. Februar 1839 (Br. G.-Bessel, S. 524); ihnen gegenüber vertritt Bessel in dem Briefe vom 28. Juni 1839 (Br. G.-Bessel, S. 526) mit grosser Wärme den Standpunkt, den Schumacher in dem Briefe vom 2. Dez. 1826 eingenommen hatte.

Die vollendete Darstellung, bei der Archimedes und Newton für Gauss die Vorbilder waren, sollte nur das äussere Zeichen der inneren Vollkommenheit sein, und hier erst gewinnt das Wort von der Gaussschen Strenge seine wahre Bedeutung. Von den Geometern des 18. Jahrhunderts war in der Freude über die Fülle neuer Entdeckungen, zu denen die Infinitesimalrechnung die Mittel bot, die Sicherung der Grundlagen ausser Acht gelassen worden. Sehr stark tritt das bei Euler hervor, bei dem gerade die grundlegenden Betrachtungen viel zu wünschen übrig lassen[1]). Dagegen finden sich schon bei d'Alembert Ansätze zu einer kritischen oder besser skeptischen Auffassung, und Lagrange hat in der *Théorie des fonctions analytiques* geradezu das Ziel erstrebt, den Beweisen den Charakter einleuchtender Gewissheit und Strenge zu geben, der die Lösungen der Alten auszeichnet[2]). Der »rigor apud veteres consuetus« ist es, den der junge Gauss im bewussten Gegensatz zu den Gepflogenheiten des 18. Jahrhunderts auf seine Fahne geschrieben hat[3]). Im hohen Alter hat er Schumacher gegenüber seine Überzeugung mit folgenden

1) Vgl. etwa L. Schlesinger und F. Engel in der Vorrede zu Eulers *Institutiones calculi integralis*, Opera omnia, ser. I, vol. 11, Leipzig 1913, S. XIII.

2) J. L. Lagrange, *Théorie des fonctions analytiques*, Paris 1797; Oeuvres, t. 9, S. 184.

3) C. F. Gauss, *Disquisitiones arithmeticae*, Lipsiae 1801, Praefatio; W. I, S. 5.

Worten ausgesprochen: »Es ist der Charakter der Mathematik der neueren Zeit (im Gegensatz gegen das Altertum), dass durch unsere Zeichensprache und Namengebungen wir einen Hebel besitzen, wodurch die verwickeltsten Argumentationen auf einen gewissen Mechanismus reduziert werden. An Reichtum hat dadurch die Wissenschaft unendlich gewonnen, an Schönheit und Solidität aber, wie das Geschäft gewöhnlich betrieben wird, eben so sehr verloren. Wie oft wird jener Hebel eben nur mechanisch angewandt, obgleich die Befugnis dazu in den meisten Fällen gewisse stillschweigende Voraussetzungen impliziert. Ich fordere, man soll bei allem Gebrauch des Kalküls, bei allen Begriffsverwendungen sich immer der ursprünglichen Bedingungen bewusst bleiben, und alle Produkte des Mechanismus niemals über die klare Befugnis hinaus als Eigentum betrachten. Der gewöhnliche Gang ist aber der, dass man für die Analysis einen Charakter der Allgemeinheit in Anspruch nimmt und dem Andern, der so herausgebrachte Resultate noch nicht für bewiesen anerkennt, zumutet, er solle das Gegenteil nachweisen. Die Zumutung darf man aber nur an den stellen, der seinerseits behauptet, ein Resultat sei falsch, nicht aber dem, der ein Resultat nicht für bewiesen anerkennt, welches auf einem Mechanismus beruhet, dessen ursprüngliche, wesentliche Bedingungen in dem vorliegenden Fall gar nicht zutreffen« (Brief an Schumacher vom 1. September 1850, W. X 1, S. 434).

Ein zweiter Grund für das Missverhältnis zwischen dem Reichtum an Gedanken, die »bei der unglaublichen Produktivität in dem mächtigen Gehirn auftauchten« (Sartorius, S. 79), und dem verhältnismässig geringen Umfang der rein mathematischen Veröffentlichungen von Gauss liegt in Hemmungen innerer und äusserer Art, die bei seiner Art des Arbeitens dem Druckfertigmachen entgegenstanden.

In dem schon erwähnten Briefe an Bessel vom 28. Februar 1839 hatte Gauss mit einer bei ihm ungewöhnlichen Heftigkeit des Tones hervorgehoben, er brauche zum Ausarbeiten »Zeit, viel Zeit, viel mehr Zeit, als Sie sich wohl vorstellen mögen. Und meine Zeit ist vielfach beschränkt, sehr beschränkt«. Solche Klagen über Mangel an Zeit für die theoretischen Untersuchungen wiederholen sich beständig in den Briefen. Die glücklichste Zeit seines Lebens sind wohl jene neun Jahre von 1799 bis 1807 gewesen, die er als Schützling des »edlen Fürsten, dem er alles, was er war, verdankte« (Brief an Olbers

vom 23. Februar 1802, Br. G.-O. 1, S. 14) in Braunschweig zugebracht hat. Noch im Alter hat er dieser Jahre mit Rührung und Dankbarkeit gedacht. So schreibt er am 15 Februar 1845 an ENCKE über EISENSTEIN, der damals mit Unterstützung des Königs von Preussen in freier Musse seinen mathematischen Forschungen nachging: »Er lebt noch in der glücklichen Zeit, wo er sich ganz seiner Begabung hingeben kann, ohne dass er nötig hätte, sich durch irgend etwas Fremdartiges stören zu lassen. Ich werde lebhaft an die — längst verflossenen — Jahre erinnert, wo ich in ähnlichen Verhältnissen lebte. Von der andern Seite erfordern auch gerade die rein mathematischen Spekulationen eine unverkümmerte und unzerstückelte Zeit« (Brief im GAUSS-Archiv).

Die Pflichten der Professur haben schwer auf GAUSS gelastet, zunächst sein Amt als Leiter der Göttinger Sternwarte. »So sehr ich die Astronomie liebe«, schreibt er am 28. Juni 1820 an BESSEL (Br. G.-BESSEL, S. 353), »fühle ich doch das Beschwerliche des Lebens eines praktischen Astronomen, ohne Hilfe, oft nur zu sehr, am peinlichsten aber darin, dass ich darüber fast gar nicht zu irgend einer zusammenhängenden grösseren theoretischen Arbeit kommen kann«.

Hierzu traten seit 1821 die geodätischen Messungen, und wenn auch die mühsamen und zeitraubenden Arbeiten im Felde für GAUSS selbst mit dem Jahre 1825 beendet waren, so behielt er doch die Oberaufsicht über die Triangulationen und führte die abschliessenden Rechnungen. »Mehr als zwanzig Jahre hindurch«, sagt GAEDE[1]), »hat GAUSS unter der ermüdenden Last dieses Geschäftes gelebt und gelitten, welches, wenn einmal in Gang gebracht und in zweckmässiger Weise schematisch organisiert, von jedem andern ebenso gut hätte besorgt werden können, während GAUSS durch die massenhafte, und sobald die Methode feststand, im Wesentlichen nur noch mechanische Rechenarbeit der Musse verlustig ging, deren er für seine schöpferische Tätigkeit auf spekulativem Gebiet, nach seinem eigenen Zeugnis, in hohem Masse bedurfte«.

Dazu kam die Verpflichtung, Vorlesungen zu halten. »Für eine mathematische Lehrstelle hat er eine ganz entschiedene Abneigung«, hatte OLBERS

---

1) GAEDE, *Beiträge zur Kenntnis von Gauss' praktisch-geodätischen Arbeiten*, Zeitschrift für Vermessungswesen, Bd. 14, 1885; auch als selbständiges Werk, Karlsruhe 1885, erschienen, S. 68.

am 3. November 1802 an HEEREN in Göttingen geschrieben, als es sich um eine Berufung von GAUSS an die dortige Universität handelte. »sein Lieblingswunsch ist, Astronom bei irgend einer Sternwarte zu werden, um seine ganze Zeit zwischen Beobachtungen und feinen, tiefsinnigen Untersuchungen zur Erweiterung der Wissenschaft teilen zu können« (SARTORIUS, S. 31). Allein seine Stellung an der Universität brachte es mit sich, dass er »das Handwerk eines Professors« (SARTORIUS, S. 96) ausüben musste. Er hat es mit der ihm eigenen Gewissenhaftigkeit getan, aber schon in dem Briefe an BESSEL vom 27. Januar 1816 (Br. G.-BESSEL, S. 232) nennt er das Kollegienlesen »ein sehr lästiges, undankbares Geschäft«, und ganz besonders bitter werden seine Klagen, als die Last der geodätischen Messungen hinzukommt. Die in Aussicht stehende Berufung nach Berlin veranlasst ihn 1824 zu dem Ausruf: »Ich bin ja hier so weit davon entfernt, Herr meiner Zeit zu sein. Ich muss sie teilen zwischen Kollegia lesen (wogegen ich von jeher einen Widerwillen gehabt habe, der, wenn auch nicht entstanden, doch vergrössert ist durch das Gefühl, welches mich immer dabei begleitet, meine Zeit wegzuwerfen) und praktisch astronomische Arbeiten. . . . Was bleibt mir also für solche Arbeiten, auf die ich selbst einen höhern Wert legen könnte, als flüchtige Nebenstunden? Ein anderer Charakter als der meinige, weniger empfindlich für unangenehme Eindrücke, oder ich selbst, wenn manches andere anders wäre, als es ist, würde vielleicht auch solchen Nebenstunden noch mehr abgewinnen, als ich es im allgemeinen kann« (Brief an BESSEL vom 14. März 1824, Br. G.-BESSEL, S. 428). Es liessen sich den Briefen an die vertrauten Freunde noch zahlreiche Klagen dieser Art entnehmen. Hier möge nur noch eine Stelle aus dem Briefe an OLBERS vom 19. Februar 1826 (Br. G.-O. 2, S. 138) angeführt werden: »Unabhängigkeit, das ist das grosse Losungswort für die Geistesarbeiten in die Tiefe. Aber wenn ich meinen Kopf voll von in der Luft schwebenden geistigen Bildern habe, die Stunde heranrückt, wo ich Kollegien lesen muss, so kann ich Ihnen nicht beschreiben, wie angreifend das Abspringen, das Anfrischen heterogener Ideen für mich ist, und wie schwer mir oft Dinge werden, die ich unter andern Umständen für eine erbärmliche ABC-Arbeit halten würde. . . . Inzwischen, lieber OLBERS, will ich Sie nicht mit Klagen über Dinge [er]müden, die nicht zu ändern sind; meine ganze Stellung

im Leben müsste eine andere sein, wenn dergleichen Widerwärtigkeiten nicht öfter eintreffen sollten«.

Aus den vorstehenden Äusserungen klingt heraus, dass es nicht nur Mangel an Musse war, der den Fortgang der theoretischen Forschungen hemmte, sondern dass in der Gemütsverfassung von Gauss Hinderungen lagen. »Es ist wahr«, schreibt er am 20. April 1848 an seinen Jugendfreund Bolyai (Br. G.-Bolyai, S. 132), »mein Leben ist mit Vielem geschmückt gewesen, was die Welt für beneidenswert hält. Aber glaube mir, lieber Bolyai, die herben Seiten des Lebens, wenigstens des meinigen, die sich wie der rote Faden dadurch ziehen und denen man im höheren Alter immer wehrloser gegenübersteht, werden nicht zum hundertsten Teil aufgewogen von dem Erfreulichen. Ich will gern zugeben, dass dieselben Schicksale, die zu tragen mir so schwer geworden ist und noch ist, manchem andern viel leichter gewesen wären, aber die Gemütsverfassung gehört zu unserm Ich, der Schöpfer unserer Existenz hat sie uns mitgegeben, und wir vermögen wenig daran zu ändern«. Es ist hier nicht der Ort, von dem Leid zu sprechen, das Gauss mehr als einmal in seinem Hause betroffen hat. Es hat »die Heiterkeit des Geistes«, die er zur wissenschaftlichen Arbeit nötig hatte, »nur zu sehr und zu vielfach getrübt« (Brief an Bessel vom 28 Februar 1839, Br. G.-Bessel, S. 524).

Die Empfindlichkeit für unangenehme Eindrücke, von der Gauss in dem Brief an Bessel vom 14. März 1824 spricht, hat sicherlich dazu beigetragen, dass er es vermied, in seinen Veröffentlichungen Gegenstände zu berühren, die zu Streitigkeiten Anlass geben konnten. Wie behutsam geht er in seiner Dissertation mit den imaginären Grössen um, und gar ihre geometrische Deutung, die er nach seinem Zeugnis schon vor 1799 besass, hat er damals unterdrückt und erst 1831 bekannt gemacht. Ebenso hat er seine antieuklidische Geometrie nicht zur Veröffentlichung ausgearbeitet. »Vielleicht wird dies auch bei meinen Lebzeiten nie geschehen, da ich das Geschrei der Böoter scheue, wenn ich meine Ansicht ganz aussprechen wollte« (Brief an Bessel vom 27. Januar 1829, W. VIII, S. 200).

Diese Scheu war verstärkt worden durch böse Erfahrungen, die Gauss machen musste, als er 1816 in der Besprechung der Parallelentheorien von Schwab und Metternich (W. IV, S. 364, VIII, S. 170) Andeutungen über die Unbeweisbarkeit des elften Euklidischen Axioms gewagt hatte: »Es ist mit

Kot darnach geworfen«, schreibt er am 15. Januar 1827 an SCHUMACHER (Br. G.-SCH. II. S, 94)[1]. Solche Angriffe hatte GAUSS wohl im Auge, wenn er am 25. August 1818 an GERLING schrieb: »Ich freue mich, dass Sie den Mut haben, sich [in Ihrem Lehrbuch] so auszudrücken, als wenn Sie die Möglichkeit, dass unsere Parallelentheorie, mithin unsere ganze Geometrie, falsch wäre, anerkennten. Aber die Wespen, deren Nest Sie aufstören, werden Ihnen um den Kopf fliegen« (W. VIII, S. 179).

Dazu kam die geringe Meinung, die GAUSS von der grossen Mehrzahl der Mathematiker hatte. Bereits am 16. Dezember 1799 schreibt er an WOLFGANG BOLYAI, der ihm einen Versuch, das Parallelenaxiom zu beweisen, übersandt hatte: »Mach' doch ja Deine Arbeit bald bekannt; gewiss wirst Du dafür den Dank zwar nicht des grossen Publikums (worunter auch mancher gehört, der für einen geschickten Mathematiker gehalten wird) einernten, denn ich überzeuge mich immer mehr, dass die Zahl der wahren Geometer äusserst gering ist, und die meisten die Schwierigkeiten bei solchen Arbeiten weder beurteilen noch selbst einmal sie verstehen können — aber gewiss den Dank aller derer, deren Urteil Dir allein wirklich schätzbar sein kann« (W. VIII, S. 159). Als WOLFGANG BOLYAI dann im Jahre 1832 seinem Jugendfreunde die *Scientia spatii absolute vera* seines Sohnes JOHANN übersandt hatte, in der das Rätsel der Parallelenfrage gelöst war, antwortete dieser am 6 März 1832: »Die meisten Menschen haben gar nicht den rechten Sinn für das, worauf es dabei ankommt, und ich habe nur wenige Menschen gefunden, die das, was ich ihnen mitteilte, mit besonderem Interesse aufnahmen. Um das zu können, muss man erst recht lebendig gefühlt haben, was eigentlich fehlt, und darüber sind die meisten Menschen ganz unklar« (W. VIII, S. 221). Noch schärfer äussert sich GAUSS in einem Briefe an GERLING vom 25. Juni 1815: »Mir däucht, es ist in mehr als einer Rücksicht wichtig, bei den Schülern den Sinn für Rigor wach zu erhalten, da die meisten Menschen nur gar zu geneigt sind, zu einer laxen Observanz überzugehen. Selbst unsere grössten Mathematiker haben meistenteils in dieser Rücksicht etwas stumpfe Fühlhörner« (Brief im GAUSS-Archiv). Ein gut Teil Menschenverachtung aber steckt in dem Rat, den GAUSS am 29. September 1837 seinem jüngeren Freunde MÖBIUS erteilt: »Man

---

1) Von wem der bösartige Angriff ausgegangen ist, hat sich noch nicht ermitteln lassen.

muss immer bedenken, dass, wo die Leser, für welche man schreibt, keinen Anstoss nehmen, es vielleicht gar nicht wohlgetan wäre, tiefer einzudringen, als ihnen frommt« (W. XI 1, S. 19).

Gauss hat bei seinen Klagen über mangelndes Verständnis wohl auch an die Briefe gedacht, die er im Jahre 1831 mit Schumacher gewechselt hatte, als dieser glaubte, das Parallelenaxiom bewiesen zu haben (W. VIII, S. 210—219). Schumacher liess sich von der Unzulänglichkeit seines Verfahrens nicht überzeugen und sandte den ausführlichen Brief Gaussens vom 12. Juli 1831 an Bessel. »Eine tolle Geschichte«, antwortete dieser am 1. Aug. 1831, »ist doch die im Gaussschen (hier zurückfolgenden) Briefe vorkommende, dass die Peripherien zweier Kreise von den Halbmessern r und r' nicht im Verhältnis $r:r'$ stehen sollen. Ich bezweifele dieses nicht, weil Gauss es sagt; allein diese Ungleichheit ist mir so wenig anschaulich, dass ich mir, nach dem alten Kulenkampschen Ausdruck[1] kein Denkbild davon machen kann« (Abschrift des Briefes im Gauss-Archiv).

Die Zurückhaltung, die Gauss übte, brachte die Gefahr mit sich, dass andere ihm zuvorkamen, und das ist auch wiederholt geschehen. Aber in diesem Punkte war Gauss unempfindlich. Am 30. Januar 1812 schreibt er an Laplace: »J'ai dans mes papiers beaucoup de choses dont peut-être je pourrai perdre la priorité de la publication, mais soit, j'aime mieux, faire mûrir les choses« (W. X 1, S. 374), und als Abel seine *Recherches* veröffentlicht hatte, begnügt er sich damit festzustellen, dass der Norweger ihn in Bezug auf etwa ein Drittel der Sachen der Mühe überhoben habe, sie auszuarbeiten, »zumal da er alle Entwickelungen mit vieler Eleganz und Konzision gemacht« habe (Brief an Bessel vom 30. März 1828, Br. G.-Bessel, S. 477). Bei Johann Bolyais *Scientia spatii* fand er es sogar höchst erfreulich, dass gerade der Sohn seines alten Freundes ihm auf eine so merkwürdige Art zuvorgekommen sei (Brief vom 6. März 1832, W. VIII, S. 221).

1) Andreas Gottlieb Kulenkamp hiess der Inhaber des Handelshauses in Bremen, bei dem Bessel von 1799 bis 1806 tätig gewesen war.

A. Von den Anfängen der nichteuklidischen Geometrie bis zur Entdeckung der transzendenten Trigonometrie (1792—1817).

3.

Einleitendes. Die Jugendzeit (1792—1795).

Als JACOBI am 5. August 1827, auf Grund eines Briefes, den SCHUMACHER an ihn gerichtet hatte, LEGENDRE mitteilte, GAUSS habe schon 1808 einen Teil der von JACOBI in den Astronomischen Nachrichten veröffentlichten Sätze besessen (JACOBI, Werke I, S. 394), antwortete LEGENDRE am 30. November: »Comment se fait-il que M. GAUSS ait osé vous faire dire que la plupart de vos théorèmes lui étaient connus et qu'il en avait fait la découverte dès 1808? Cet excès d'impudence n'est pas croyable de la part d'un homme qui a assez de mérite personel pour n'avoir pas besoin de s'approprier les découvertes des autres« (S. 398), und am 14. April 1828 setzt er hinzu: »Il y a des gens comme M. GAUSS, qui ne se feraient pas scrupule de vous ravir, s'ils le pouvaient, le fruit de vos recherches, et de prétendre qu'elles sont depuis longtemps en leur possession. Prétention bien absurde assurément: car si M. GAUSS était tombé sur de pareilles découvertes qui surpassent, à mes yeux, tout ce qui a été fait jusqu'ici en analyse, bien sûrement il se serait empressé de les publier« (S. 418).

Der Nachlass von GAUSS hat demgegenüber gezeigt, dass dieser bereits im Jahre 1797 begonnen hatte, die lemniskatischen Funktionen zu untersuchen, dass er bis zum Jahre 1800 die wesentlichen Eigenschaften der allgemeinen elliptischen Funktionen erkannt hatte und dass er im Jahre 1808 diese Untersuchungen wieder aufgenommen und sich dem Problem der Teilung zugewandt hatte, auf das sich jene von JACOBI entdeckten Sätze beziehen.

Ebenso sind in anderen Fällen die Angaben, die GAUSS über seine mathematischen Entdeckungen gemacht hat, durch Aufzeichnungen im Nachlass oder durch Briefe bis in die Einzelheiten hinein bestätigt worden. Wie konnte es auch anders sein, bei einem Manne von so grosser Wahrheitsliebe und Gewissenhaftigkeit? Dazu wurde GAUSS durch ein ungewöhnlich treues Gedächtnis unterstützt. Auch hat er häufig die Aufzeichnungen aus den Jahren 1796 bis 1815 benutzt, die er sich in einem Notizenjournal oder *Tagebuch* gemacht hatte (W. X 1, S. 488—572); in der späteren Zeit pflegte er umgekehrt in Hand-

bücher kurze Bemerkungen über mathematische Sätze einzutragen, die er in Briefen erwähnt hatte. Gewiss kommen gelegentlich Angaben vor, die einander zu widersprechen scheinen, allein in den allermeisten Fällen haben sie sich bei sorgfältiger Deutung in Übereinstimmung bringen lassen, und so wird man den Äusserungen von Gauss über die Entstehung seiner Gedanken volles Vertrauen entgegenbringen dürfen.

Hiernach sind auch die Äusserungen zu beurteilen, die Gauss über die Anfänge seiner Beschäftigung mit den Grundlagen der Geometrie gemacht hat.

Am 28. November 1846 schreibt Gauss an Schumacher, er habe schon im Jahre 1792, also mit 15 Jahren, an eine Geometrie gedacht, »die stattfinden müsste und strenge konsequent stattfinden könnte, wenn die Euklidische Geometrie nicht die wahre ist«, das heisst, wenn das elfte Axiom nicht gilt (W. VIII, S. 238). Hiermit ist jedenfalls nur das erste Aufblitzen des Gedankens gemeint. Denn unmittelbar vorher, am 2. Oktober 1846, hatte Gauss zu Gerling geäussert, der Satz, dass in jeder vom Parallelenaxiom unabhängigen Geometrie der Flächeninhalt eines Vielecks der Abweichung der Summe der Aussenwinkel von 360^0 proportional ist, sei »der erste, gleichsam an der Schwelle liegende Satz der Theorie, den ich schon im Jahr 1794 als notwendig erkannte« (W. VIII, S. 266). Wir werden sehen, dass diese Beziehung zwischen dem Inhalt und der Winkelsumme eines Vielecks einen Angelpunkt der Gaussschen Theorie gebildet hat, und dürfen daher annehmen, dass der Zeitpunkt, wo er zu einer solchen grundlegenden Einsicht gelangt war, sich ihm fest eingeprägt hatte.

Als Wolfgang Bolyai seinem Jugendfreunde die *Scientia spatii absolute vera* seines Sohnes Johann übersandt hatte, bemerkte Gauss am 6. März 1832, der ganze Inhalt der Schrift komme fast durchgehends überein »mit seinen eigenen, zum Teile schon seit 30 bis 35 Jahren angestellten Meditationen« (W. VIII, S. 221). Man wird damit bis auf die Jahre von 1797 bis 1802 zurückgeführt. Zu dieser Zeit hat Gauss also angefangen, in weiterem Umfange die Folgen zu entwickeln, die sich ergeben, wenn man die Wahrheit des elften Euklidischen Axioms leugnet. In der Tat bringt das *Tagebuch* unter dem September 1799 (T. Nr. 99) die Eintragung: »In principiis geometriae egregios progressus fecimus«. Worin diese ausgezeichneten Fortschritte bestanden haben, wird noch zu erörtern sein.

Gehen wir in der Reihe der Zeugnisse weiter. Kurz vorher, am 17. Mai 1831, hatte GAUSS an SCHUMACHER berichtet, er habe »angefangen, einiges von seinen Meditationen über die Parallellinien aufzuschreiben, die zum Teil schon gegen 40 Jahr alt sind« (W. VIII, S. 213). Er geht also hier bis auf die keimhaften Ursprünge zurück, für die er die Jahre 1792 und 1794 genannt hatte. Dieselbe Datierung findet sich in dem Briefe an TAURINUS vom 8. November 1824: »Ich vermute, dass Sie sich noch nicht lange mit diesem Gegenstande [der Parallelentheorie] beschäftigt haben. Bei mir ist es über 30 Jahr, und ich glaube nicht, dass jemand sich eben mit diesem zweiten Teil [wo die Winkelsumme des Dreiecks kleiner als zwei Rechte ist] mehr beschäftigt haben könne als ich, obgleich ich niemals darüber etwas bekannt gemacht habe« (W. VIII, S. 186).

4.

Fortschritte in den Grundlagen der Geometrie (1795—1799).

Als GAUSS im Oktober 1795 seine Studien in Göttingen begann, hatte er bereits, wie wir bemerkten, die schwache Stelle des EUKLIDischen Lehrgebäudes erkannt und war wenigstens bei dem Inhalt der Vielecke den Folgerungen nachgegangen, die sich aus der Verwerfung des Parallelenaxioms ergeben.

Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie haben gegen das Ende des achtzehnten Jahrhunderts die Mathematiker und darüber hinaus weite Kreise der Gebildeten lebhaft beschäftigt. Von zwei Seiten waren Anregungen dazu gekommen.

Seit dem Ende des 17. Jahrhunderts hatten, um nur einige wichtige Namen zu nennen, HUME, LEIBNIZ, D'ALEMBERT die Frage nach dem Wesen der mathematischen Erkenntnis aufgeworfen, und durch KANTS *Kritik der reinen Vernunft* (1781, 1787) war diese Frage geradezu in den Mittelpunkt der philosophischen Erörterungen gestellt worden. Dabei war es besonders die Parallelentheorie, an der sich Berufene und Unberufene versuchten, denn dem elften EUKLIDischen Axiom fehlte jenes Merkmal der einleuchtenden Gewissheit, die dem Apriorischen eigen sein sollte[1]; es ist deutlich zu erkennen,

1) I. KANT, *Kritik der reinen Vernunft*, 1. Aufl. 1781, S. 25, 2. Aufl. 1777, S. 39: »So werden auch alle geometrischen Grundsätze . . . niemals aus allgemeinen Begriffen . . ., sondern aus der Anschauung, und zwar a priori mit apodiktischer Gewissheit hergeleitet«.

wie mit dem Jahre 1781 die Flut der Veröffentlichungen anschwillt, die sich auf die Parallelenfrage beziehen[1]).

Noch von einer anderen Seite kamen Einwirkungen. Der französische Umsturz führte zur Gründung neuer Hochschulen in Paris, der École polytechnique und der École normale, an die die bedeutendsten Mathematiker des Landes berufen wurden. Dies veranlasste sie, zu den Elementen ihrer Wissenschaft zurückzukehren. LAGRANGE verschmähte es nicht, Vorlesungen über die Elemente der Arithmetik und Algebra zu halten[2]), und LEGENDRE liess 1794 seine Elemente der Geometrie erscheinen, die einen ungewöhnlichen Erfolg hatten und 1823 ihre zwölfte Auflage erlebten[3]). In der Parallelentheorie war LEGENDRE bemüht gewesen, die bei EUKLID vorhandenen Mängel zu beseitigen, aber die beständigen Änderungen bei den auf einander folgenden Auflagen zeigen, dass er auf schwankendem Boden stand; wie seine letzte, zusammenfassende Veröffentlichung vom Jahre 1833 erkennen lässt[4]), hat er sich niemals zu dem Gedanken der Unbeweisbarkeit des elften Axioms erheben können[5]).

---

1) Vgl. das Literaturverzeichnis bei P. STÄCKEL und F. ENGEL, *die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss*, Leipzig 1895; im Folgenden angeführt mit P. Th.

2) J. L. LAGRANGE, *Leçons élémentaires sur les mathématiques, données à l'École normale en 1795*, Oeuvres t. 7, S. 183.

3) A. M. LEGENDRE, *Eléments de géométrie*, Paris 1794; 12. éd., Paris 1823.

4) A. M. LEGENDRE, *Réflexions sur les différentes manières de démontrer la théorie des parallèles*, Mém. de l'Acad., t. 12, année 1828, Paris 1833, S. 367.

5) In dem Briefe an OLBERS vom 30. Juli 1806 (W. VIII, S. 139, 165) bemerkt GAUSS, es scheine sein Schicksal zu sein, in fast allen seinen theoretischen Arbeiten mit LEGENDRE zu konkurrieren, und führt dafür an: die höhere Arithmetik, die transzendenten Funktionen, welche mit der Rektifikation der Ellipse zusammenhängen, die ersten Gründe der Geometrie und die Methode der kleinsten Quadrate.

Für die höhere Arithmetik kommt in Betracht LEGENDRES *Essay sur la théorie des nombres*, Paris 1798, dessen Verhältnis zu den *Disquisitiones arithmeticae* TSCHEBYSCHEFF in seiner *Theorie der Kongruenzen* (deutsch von SCHAPIRA, Berlin 1889) gut gekennzeichnet hat; im Besonderen ist noch das Reziprozitätsgesetz der quadratischen Reste zu nennen; vgl. BACHMANN, W. X 2, Abh. I, S. 14. Die elliptischen Integrale hat LEGENDRE in dem grundlegenden *Mémoire sur les transcendantes elliptiques*, Paris 1794 behandelt und ihnen dann zwei umfangreiche Werke gewidmet: *Exercices de calcul intégral*, 3 Bände, Paris 1811—1816; *Traité des fonctions elliptiques*, 3 Bände, Paris 1825—1832. Die Methode der kleinsten Quadrate entwickelt LEGENDRE in den *Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes*, Paris 1805, während die *Theoria motus corporum coelestium* von GAUSS erst 1809 erschienen ist (vgl. auch W. VIII, S. 136—141 und X 1, S. 373 und 380).

Hinzuzufügen wäre noch, dass GAUSS und LEGENDRE sich mit der Theorie und Praxis der Geodäsie beschäftigt haben und dass LEGENDRES Satz über die Zurückführung eines kleinen sphärischen Dreiecks

Die Universität Göttingen nahm lebhaften Anteil an der Bewegung, deren Hervortreten soeben geschildert wurde. Professor der Mathematik war damals KAESTNER (1719—1800). Er hat die Literatur über die Parallelentheorie eifrig gesammelt und eine noch heute wertvolle Dissertation, KLÜGELS *Recensio conatuum praecipuorum theoriam parallelarum demonstrandi* vom Jahre 1763, veranlasst. In dem Nachwort meint KAESTNER, ein Beweis des Parallelenaxioms sei nur zu erhoffen durch eine genauere Ausbildung der Geometrie der Lage, die mit LEIBNIZ untergegangen sei. Gegenwärtig bleibe nur übrig, offen die Forderung EUKLIDS als solche auszusprechen; niemand, der bei gesunden Sinnen sei, werde sie bestreiten wollen. In seinen späteren Vorlesungen hat KAESTNER »an der Möglichkeit der Lösung verzweifelnd mit unbegreiflicher Resignation, anstatt nach der wahren Demonstration zu forschen, ein blindes Annehmen angeraten« (P. Th. S. 139—141). Ähnlich wie KAESTNER dachte auch sein Kollege an der Nachbar-Universität Helmstedt, JOH. FRIEDR. PFAFF (1765—1825), der meinte, alles was sich tun liesse sei, das Parallelenaxiom durch ein einfacheres zu ersetzen, es zu simplifizieren (P. Th. S. 215).

Als GAUSS nach Göttingen kam, habilitierte sich gerade für Mathematik J. WILDT (1770—1844) mit einer Probeschrift über die Parallelentheorie[1]. Ein Liebhaber auf diesem Gebiete war auch der ausserordentliche Professor der Astronomie CARL FELIX SEYFFER (1762—1822). Im Jahre 1801 hat er zwei Besprechungen von Versuchen, das Parallelenaxiom zu beweisen, in den Göttinger Gelehrten Anzeigen veröffentlicht; sie zeigen, dass er die Schriften mit Verständnis und Urteil gelesen hatte; ja SEYFFER war zu der Einsicht

auf ein ebenes Dreieck mit ebenso langen Seiten auf die Untersuchungen von GAUSS zur allgemeinen Lehre von den krummen Flächen anregend gewirkt hat. Auch bei der Anziehung der homogenen Ellipsoide sind beide zusammengetroffen; für LEGENDRE sind hier zu nennen die Abhandlungen in den Mémoires des savants étrangers, t. 10, Paris 1785 und in den Mémoires de l'Institut, année 1810, 2. partie, Paris 1814. Endlich sind noch die Arbeiten über das von GAUSS mit Π, von LEGENDRE mit Γ bezeichnete EULERsche Integral zu erwähnen (*Exercices*, t. I, S. 222—307).

Die Vergleichung der Leistungen zeigt, dass LEGENDRE mit scharfem Blick die Stellen erkannt hatte, an denen die mathematische Forschung mit Erfolg einsetzen konnte. Seinem unermüdlichen Fleiss und analytischen Geschick ist eine Reihe schöner Erfolge zu Teil geworden, jedoch blieb er überall auf einer Stufe stehen, die zu überschreiten erst dem Genie von GAUSS vergönnt war. Mit besonderer Deutlichkeit tritt dies bei den Grundlagen der Geometrie hervor.

1) J. WILDT, *Theses quae de lineis parallelis respondent*, Göttingen 1795. WILDT hat in den Göttinger Gelehrten Anzeigen, Jahrgang 1800, S. 1769—1772 drei »auf reiner Anschauung beruhende Beweise« des elften Axioms veröffentlicht.

gekommen, dass »es mehr als zweifelhaft scheine, ob es überhaupt möglich sei, das elfte Axiom zu beweisen, ohne ein neues Axiom zu Hilfe zu nehmen« (P. Th. S. 214).

Während GAUSS zu KAESTNER und WILDT in kein näheres Verhältnis getreten ist, hat er mit SEYFFER verkehrt und ist mit ihm bis zu dessen Tode im Briefwechsel geblieben. Ihre Unterhaltungen haben auch die Parallelentheorie betroffen, denn am 26. Juni 1801 schreibt SEYFFER an GAUSS: »Vielleicht ist es Ihnen nicht uninteressant, dass die Rezension in der hiesigen Zeitung [den Gött. Gel. Anzeigen] über die Theorie der Parallelen von SCHWAB von mir war. Ich wünschte, dass Sie mir Ihre lehrreichen Ideen hierüber gelegentlich sagten« (Brief im GAUSS-Archiv).

Im Hause SEYFFERS hat GAUSS seinen besten Jugendfreund, den Ungarn WOLFGANG BOLYAI kennen gelernt. »Als WOLFGANG nach Göttingen kam«, erzählt sein Sohn JOHANN, »traf er mit GAUSS zufällig bei dem Professor [SEYFFER] zusammen und äusserte sich da freimütig und entschieden über die Leichtfertigkeit der Behandlung der Mathematik; kurz darauf begegnete er GAUSS am Walle beim Spazierengehen; sie näherten sich einander. Mein Vater sprach unter anderem von seinen Gedanken behufs Erklärung der geraden Linie und der etwaigen Wege zum Beweise des elften Axioms, und der damals schon zum Koloss in den höheren Regionen der Wissenschaft, besonders der Zahlenlehre, emporgewachsene GAUSS brach ergötzt, überrascht in die lakonischen Worte aus: Sie sind ein Genie; Sie sind mein Freund!, worauf sogleich das Band der Brüderschaft erfolgte«[1]. Über den Verkehr zwischen den beiden Freunden berichtet WOLFGANG: »Er war sehr bescheiden und zeigte wenig; nicht drei Tage, wie mit Plato, jahrelang konnte man mit ihm zusammen sein, ohne seine Grösse zu erkennen. Schade, dass ich dieses titellose, schweigsame Buch nicht aufzumachen und zu lesen verstand. Ich wusste nicht, wie viel er weiss, und er hielt, nachdem er meine Art sah, viel von mir, ohne zu wissen, wie wenig ich bin. Uns verband die wahre (nicht oberflächliche) Leidenschaft für die Mathematik und unsere sittliche Übereinstimmung, so dass wir oft, mit einander wandernd, mit den eigenen Gedanken beschäftigt stundenlang wortlos waren« (BOL. S. 9).

1) WOLFGANG und JOHANN BOLYAI, *Geometrische Untersuchungen*, herausgegeben von P. STÄCKEL, Leipzig 1913, 1. Teil: Leben und Schriften der beiden BOLYAI, S. 8; im Folgenden angeführt mit BOL.

Was Bolyai und Gauss über das Parallelenaxiom mit einander verhandelt haben, wissen wir nicht. Wohl aber wissen wir, dass Wolfgang, nachdem sein Freund im Herbst 1798 nach Braunschweig zurückgekehrt war, sich angestrengt bemüht hat, das Axiom zu beweisen und dass er im Mai 1799 sein Ziel erreicht zu haben glaubte. Bolyai ist nämlich, ehe er Deutschland verliess, noch einmal mit Gauss zusammengetroffen. Am 24. Mai 1799 haben die beiden zu Klausthal im Harz von einander Abschied genommen, und bei dieser Zusammenkunft hat Wolfgang von seiner »Göttinger Parallelentheorie« erzählt. Hierauf bezieht sich eine Stelle des Briefes von Gauss an Wolfgang vom 16. Dezember 1799: »Es tut mir sehr leid, dass ich unsere ehemalige grössere Nähe nicht benutzt habe, um mehr von Deinen Arbeiten über die ersten Gründe der Geometrie zu erfahren; ich würde mir gewiss dadurch manche vergebliche Mühe erspart haben und ruhiger geworden sein, als jemand wie ich es sein kann, so lange bei einem solchen Gegenstande noch so viel zu desiderieren ist. Ich selbst bin in meinen Arbeiten darüber weit vorgerückt (wiewohl mir meine andern ganz heterogenen Geschäfte wenig Zeit dazu lassen); allein der Weg, den ich eingeschlagen habe, führt nicht so wohl zu dem Ziele, das man wünscht und welches Du erreicht zu haben versicherst, als vielmehr dahin, die Wahrheit der Geometrie zweifelhaft zu machen« (W. VIII, S. 159).

Die Ergebnisse, zu denen Gauss, wie das *Tagebuch* (T. Nr. 99) zeigt, im September 1799 gelangt war, hat er in dem Briefe nur angedeutet. Er fährt fort: »Zwar bin ich auf manches gekommen, was den meisten schon für einen Beweis gelten würde, aber was in meinen Augen so gut wie Nichts beweist, z. B. wenn man beweisen könnte, dass ein geradliniges Dreieck möglich sei, dessen Inhalt grösser wäre als jede gegebene Fläche, so bin ich im Stande die ganze Geometrie völlig strenge zu beweisen. Die meisten würden nun wohl jenes als ein Axiom gelten lassen; ich nicht; es wäre ja wohl möglich, dass, so entfernt man auch die drei Eckpunkte des Dreiecks im Raume von einander annähme, doch der Inhalt immer unter (infra) einer gegebenen Grenze wäre. Dergleichen Sätze habe ich mehrere, aber in keinem finde ich etwas Befriedigendes« (W. VIII, S. 159).

Aufzeichnungen über die Untersuchungen, von denen Gauss spricht, sind uns nicht erhalten. Es ist jedoch sehr wahrscheinlich, dass der Brief an

Bolyai vom 6. März 1832 (W. VIII, S. 220) einen Teil dieser Untersuchungen wiedergibt. In diesem wiederholt angeführten Briefe sagt Gauss, dass er schon vor 30 bis 35 Jahren Meditationen über die Grundlagen der Geometrie angestellt habe und dass zu seiner Überraschung die Ergebnisse der *Scientia spatii* Johann Bolyais fast durchgehends damit übereinstimmten. In manchem Teile habe er etwas andere Wege eingeschlagen und als ein Specimen füge er in den Hauptzügen einen rein geometrischen Beweis des Lehrsatzes bei, dass in der antieuklidischen Geometrie die Differenz der Winkelsumme eines Dreiecks von 180^0 dem Flächeninhalte proportional sei. Der Beweis beginnt mit dem Satze, dass das asymptotische Dreieck, bei dem die drei Ecken im Unendlichen liegen, eine bestimmte endliche Area habe. Eine Herleitung wird nicht angegeben[1]. Für den Inhalt eines Dreiecks, bei dem eine Ecke im Endlichen liegt, während die Gegenseite zu den beiden anderen Seiten asymptotisch ist, ergibt sich dann eine Funktionalgleichung, die im Gebiete der stetigen Funktionen leicht gelöst werden kann. Nun entsteht ein ganz im Endlichen liegendes Dreieck aus einem asymptotischen Dreieck durch Wegnahme von solchen Dreiecken, bei denen eine Ecke im Endlichen liegt, und so folgt schliesslich die zu beweisende Behauptung.

Wie immer auch Gauss im Jahre 1799 vorgegangen sein mag, so zeigt sein Brief von 16. Dezember 1799 auf jeden Fall, dass er sich damals auf dem Wege befand, den vor ihm Saccheri (1733) und Lambert (1766) eingeschlagen hatten, nämlich planmässig die Folgerungen zu entwickeln, die sich aus der Annahme ergeben, das Euklidische Parallelenaxiom sei nicht erfüllt. Da Gauss hierbei auf keinen Widerspruch kam, wurde ihm die Wahrheit der Euklidischen Geometrie zweifelhaft. Den Gedanken, dass die nichteuklidische Geometrie »wahr« sein könne, hatte übrigens schon Lambert offen ausgesprochen (P. Th. S. 200).

Hierbei erheben sich die Fragen, ob Gauss jene Arbeiten gekannt und wann er sie möglicher Weise kennen gelernt hat. Gewiss sind sie ihm in der Göttinger Universitätsbibliothek, die er als Student fleissig benutzt hat,

1) Man kann durch eine einfache, nur die allerersten Eigenschaften asymptotischer Geraden benutzende Zeichnung ein solches Dreieck in ein inhaltgleiches, ganz im Endlichen liegendes Viereck verwandeln. Vgl. H. Liebmann, *Zur nichteuklidischen Geometrie*, Leipziger Berichte, Bd. 58, 1906, S. 560; *Nichteuklidische Geometrie*, 2. Aufl., Leipzig 1912, S. 53.

zugänglich gewesen. Allein man muss bedenken, dass diese Schriften Wolfgang Bolyai unbekannt geblieben sind; dies geht mit voller Sicherheit aus den Äusserungen seines Sohnes hervor (Bol. S. 221—223).

Dass andererseits später in den Kreisen der Schüler von Gauss von Lamberts Theorie der Parallellinien gesprochen wurde, zeigen Briefe von Bessel an Encke vom 9. Juli 1821 und von Encke an Bessel vom 13. Oktober 1821 (Abschriften im Gauss-Archiv). Auch wird Lambert in dem Briefe Bessels an Gauss vom 10. Februar 1829 erwähnt (W. VIII, S. 201). Endlich besass Gauss die *Mathematischen Abhandlungen* von J. W. H. Lehmann, Zerbst 1829, in denen Saccheri und Lambert angeführt werden; Randbemerkungen und Spuren des Gebrauches lassen darauf schliessen, dass Gauss darin gelesen und die auf die Parallelentheorie bezüglichen Stellen beachtet hat[1]).

Entscheidend für die Beurteilung der Leistung von Gauss ist der Umstand, dass weder Saccheri noch Lambert bis zur nichteuklidischen ebenen Trigonometrie vorgedrungen sind, wenn ihr auch Lambert durch den Gedanken, »die dritte Hypothese komme bei einer imaginären Kugelfläche vor« (P. Th. S. 203) nahe gekommen war; denn erst die Trigonometrie sichert für die Ebene die Widerspruchslosigkeit der absoluten Geometrie und führt damit zu der Überzeugung, dass alle Versuche, das Parallelenaxiom durch Konstruktionen in der Ebene zu beweisen, vergeblich sein müssen.

5.

Schwanken und Zweifel (1799—1805).

Wir kehren zu den Beziehungen zwischen Gauss und Bolyai zurück. Im Sommer 1799 nach Siebenbürgen zurückgekehrt, war Wolfgang zunächst durch andere Geschäfte in Anspruch genommen worden und hatte die Mathematik liegen lassen. Erst nachdem er im Frühjahr 1804 die Professur für Mathematik und Physik am evangelisch-reformierten Kollegium zu Maros-Vásárhely angetreten hatte, nahm er die »Göttingische Parallelentheorie« wieder vor, feilte sie aus und sandte den Entwurf am 16. September 1804 an Gauss. »Ich kann den Fehler nicht entdecken, prüfe Du der Wahrheit getreu und

1) Vgl. den Aufsatz von P. Stäckel: *F. A. Taurinus*, Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik, Heft 9, Leipzig 1899, S. 427.

schreibe mir so bald als nur möglich. . . . Wenn Du dieses Werkchen davor wert hieltest (ich setze den Fall), so schicke es einer würdigen Akademie hin, dass es beurteilt werde« (Br. G.-BOLYAI, S. 65).

Wie stellte sich GAUSS zu den Bemühungen seines Freundes, das Parallelenaxiom zu beweisen? Anders, als man es nach seinem Briefe vom 16. Dezember 1799 erwarten durfte. Er schreibt am 25. November 1804: »Ich habe Deinen Aufsatz mit grossem Interesse und Aufmerksamkeit durchgelesen und mich recht an dem echten gründlichen Scharfsinne ergötzt. Du willst aber nicht mein leeres Lob, das auch gewissermassen schon darum parteiisch scheinen könnte, weil Dein Ideengang sehr viel mit dem meinigen Ähnliches hat, worauf ich ehemals die Lösung dieses Gordischen Knotens versuchte und vergebens bis jetzt versuchte. Du willst nur mein aufrichtiges, unverhohlenes Urteil. Und dies ist, dass Dein Verfahren mir noch nicht Genüge leistet. Ich will versuchen, den Stein des Anstosses, den ich noch darin finde (und der auch wieder zu derselben Gruppe von Klippen gehört, woran meine Versuche bis jetzt scheiterten) mit so vieler Klarheit, als mir möglich ist, ans Licht zu ziehen. Ich habe zwar noch immer die Hoffnung, dass jene Klippen einst, und noch vor meinem Ende eine Durchfahrt erlauben werden. Indess habe ich jetzt so manche andere Beschäftigungen vor der Hand, dass ich gegenwärtig daran nicht denken kann, und glaube mir, es soll mich herzlich freuen, wenn Du mir zuvorkommst und es Dir gelingt, alle Hindernisse zu übersteigen. Ich würde dann mit der innigsten Freude alles tun, um Dein Verdienst gelten zu machen und ins Licht zu stellen, so viel in meinen Kräften steht« (W. VIII, S. 160).

BOLYAI hat diese Äusserungen als eine Ermunterung aufgefasst, sich weiter um den Beweis zu bemühen, und mit Recht. »Meine Ideen gefielen ihm überhaupt gar sehr, und er machte mich [in dem Brief vom 25. November 1804] darauf aufwerksam, welch hochwichtige Sache die Materie der Parallelen sei, obwohl er davon [von der Göttingischen Paralleleutheorie] doch keineswegs befriedigt war« (BOL. S. 90). Am 27. Dezember 1808 sandte er an GAUSS einen Nachtrag (Br. G.-BOLYAI, S. 96, vgl. BOL. S. 223). Als dieser keine Antwort gab, ist der Briefwechsel bis zum Jahre 1816 unterbrochen worden. Etwa bis zu diesem Jahre hat WOLFGANG hart mit dem zweitausendjährigen Problem gerungen, und hat schliesslich nichts davon getragen, als die Ein-

sicht, dass er alle seine Mühe verschwendet habe. »Schauderhafte, riesige Arbeiten habe ich vollbracht, habe bei Weitem Besseres geleistet, als bisher [geleistet wurde], aber keine vollkommene Befriedigung habe ich je gefunden; hier aber gilt es: si paullum a summo discessit, vergit ad imum« (Bol. S. 77).

Als Johann Bolyai von Wien aus, wo er seit 1818 Schüler der militärischen Ingenieur-Akademie war, im Frühjahr 1820 dem Vater mitteilte, dass er versuche, das elfte Axiom zu beweisen, war dieser aufs äusserste erschrocken und beschwor ihn mit den beweglichsten Worten, die Lehre von den Parallelen in Frieden zu lassen. »Verliere keine Stunde damit. Keinen Lohn bringt es, und es vergiftet das ganze Leben. Selbst durch das Jahrhunderte dauernde Kopfzerbrechen von hundert grossen Geometern ist es schlechterdings unmöglich, [das elfte] ohne ein neues Axiom zu beweisen. Ich glaube doch alle erdenklichen Ideen diesfalls erschöpft zu haben. Hätte Gauss auch fernerhin seine Zeit mit Grübeleien über dem elften Axiom zugebracht, so wären seine Lehren von den Vielecken, seine *Theoria motus corporum coelestium* und alle seine sonstigen Arbeiten nicht zum Vorschein gekommen, und er ganz zurückgeblieben. Ich kann es schriftlich nachweisen, dass er seinen Kopf über die Parallelen zerbrach. Er äusserte mündlich und schriftlich, dass er fruchtlos darüber nachgedacht habe« (Bol. S. 90).

Durch die nachdrücklichen Warnungen seines Vaters wurde Johann nicht abgeschreckt, im Gegenteil, seine Begierde, um jeden Preis durchzudringen, wuchs auf das heftigste (Bol. S. 79). Gegen Ende des Jahres 1823 gelang es ihm, den Gordischen Knoten zu durchhauen. Die unerwartete Lösung, die er fand, war damals bereits im Besitz von Gauss, der, wie wir sehen werden, nach langen Zweifeln um das Jahr 1816 zur Gewissheit gekommen war.

Am Eingang des Briefes vom 25. November 1804 hatte Gauss angedeutet, dass sein Ideengang Ähnlichkeit mit dem Wolfgangs habe. Dieser hatte die Linie betrachtet, die entsteht, wenn man in gleichweit von einander abstehenden Punkten einer Geraden nach derselben Seite Lote derselben Länge errichtet und die auf einander folgenden Endpunkte durch Gerade verbindet. Während man in der euklidischen Geometrie auf solche Art eine Parallele zur Grundlinie erhält, ergibt sich in der nichteuklidischen Geometrie ein gebrochener Linienzug, der aus gleich langen, unter gleichen Winkeln an einander stossenden Strecken besteht. Bolyai hatte zu zeigen versucht, dass ein

Linienzug der angegebenen Art, wenn man weit genug auf ihm fortgehe, die Grundlinie schneiden müsse; damit wäre nachgewiesen, dass die Annahme, das elfte Axiom gelte nicht, auf einen Widerspruch führt. Dass Gauss sich nach derselben Richtung hin versucht hat, wird durch eine Bemerkung bezeugt, die sich auf der letzten Seite des Handbuches »*Mathematische Brouillons*« findet (W. VIII, S. 163); allerdings beginnen die Aufzeichnungen des Handbuches erst mit dem Oktober 1805.

In der Zeit zwischen 1799 und 1804 hatte Gauss aber noch auf einem anderen Wege vorzudringen versucht. Notizen aus dem Jahre 1803 (W. X 1, S. 451) geben mehrere Ansätze, mittels geometrischer Konstruktionen und daraus abgeleiteter Funktionalgleichungen, also durch dasselbe Verfahren, das Gauss auch bei dem Dreiecksinhalt angewandt hat (siehe S. 15), die zwischen den Stücken eines Dreiecks geltenden Beziehungen herzuleiten. Damals sind seine Anstrengungen vergeblich gewesen; vielleicht liegt hierin der Grund, warum er gegenüber dem 1799 geäusserten Zweifel an der Wahrheit der Geometrie im Jahre 1804 von der Hoffnung spricht, nach vor seinem Ende eine Durchfahrt nach dem Hafen des Beweises für das Parallelenaxiom zu finden.

6.

Die Entdeckung der transzendenten Trigonometrie (1805—1817).

Schumacher ist im Wintersemester 1808/9 in Göttingen gewesen, um sich bei Gauss zum Astronomen auszubilden; während dieser Zeit hat er Aufzeichnungen über seine Gespräche mit Gauss gemacht. Diese »*Gaussiana*« bringen unter dem November 1808 die Bemerkung: »Gauss hat die Theorie der Parallellinien darauf zurückgebracht, dass wenn die angenommene Theorie nicht wahr wäre, es eine konstante, a priori der Länge nach gegebene Linie geben müsste, welches absurd ist. Doch hält er selbst diese Arbeit noch nicht für hinreichend« (W. VIII, S. 165). Hieraus geht hervor, dass Gauss auch im Jahre 1808 noch schwankte. »Auf die Worte: 'welches absurd ist' wollen wir dabei noch nicht einmal das geringste Gewicht legen, denn es ist höchst wahrscheinlich, dass Schumacher sie aus seinem Eigenen hinzugefügt hat, wohl aber legen wir Gewicht auf den nachfolgenden Satz. Wenn Gauss selber seine Untersuchungen noch nicht für abgeschlossen hielt, so muss er

noch immer halb und halb an EUKLID geglaubt haben; auf alle Fälle war er auch damals noch nicht vollständig von der Unbeweisbarkeit des Parallelenaxioms überzeugt«[1]).

Dass in der nichteuklidischen Geometrie, in der, ebenso wie in der Sphärik, die Ähnlichkeit von Figuren aufhört, eine a priori gegebene Einheit der Länge vorhanden ist, hatte schon 1766 LAMBERT erkannt (P. Th. S. 200), und LEGENDRE hatte 1794 auf die angebliche Widersinnigkeit eines solchen absoluten Masses einen Beweis des Parallelenaxioms gegründet.

Auch eine Bemerkung von GAUSS aus dem Jahre 1813 ist wohl in demselben Sinne aufzufassen: »In der Theorie der Parallellinien sind wir jetzt noch nicht weiter als EUKLID war. Dies ist die partie honteuse der Mathematik, die früh oder spät eine ganz andere Gestalt bekommen muss« (W. VIII, S. 166). Man wird dabei an den Ausspruch D'ALEMBERTS vom Jahre 1759 erinnert: »Die Erklärung und die Eigenschaften der geraden Linie sowie der parallelen Geraden sind die Klippe und sozusagen das Ärgernis (le scandale) der Elementargeometrie«[2]).

Ein anderer Ton wird in der Besprechung von zwei Beweisversuchen angeschlagen, die GAUSS in den Göttinger Gelehrten Anzeigen vom 20. April 1816 veröffentlicht hat (W. IV, S. 364, VIII, S. 170). Hier spricht er von dem »eitelen Bemühen, die Lücke, die man nicht ausfüllen kann, durch ein unhaltbares Gewebe von Scheinbeweisen zu verbergen«. Dass GAUSS damit auf seine Überzeugung von der Unbeweisbarkeit des elften Axioms hindeuten wollte, wird durch den S. 8, 9 angeführten Brief an SCHUMACHER vom 15. Januar 1827 bestätigt. Ein weiteres Zeugnis dafür, dass er jetzt zur Gewissheit durchgedrungen war, ist der Brief an GERLING vom 11. April 1816, also gerade aus der Zeit, in der er jene Besprechung verfasst hatte (W. VIII, S. 168). GAUSS äussert sich hier, auf GERLINGS Wunsch, zu dem vorher erwähnten Beweisversuch LEGENDRES und sagt: »Es scheint etwas paradox, dass eine konstante Linie gleichsam a priori möglich sein könne; ich finde aber darin nichts Widersprechendes. Es wäre sogar wünschenswert, dass die Geometrie EUKLIDS

1) F. ENGEL, *Lobatschefskijs Leben und Schriften*, in dem Werke: *N. I. Lobatschefskij, zwei geometrische Abhandlungen*, herausgegeben von F. ENGEL, Leipzig 1898—99, S. 380; im Folgenden angeführt mit LOB.

2) J. D'ALEMBERT, *Mélanges de littérature, d'histoire et de philosophie*, t. V., 4. éd. Amsterdam 1767, S. 200.

nicht wahr wäre, weil wir dann ein allgemeines Mass a priori hätten, z. B. könnte man als Raumeinheit die Seite desjenigen gleichseitigen Dreiecks annehmen, dessen Winkel = $59^0\,59'\,59''.99999$«.

Gauss durfte sich mit solcher Entschiedenheit äussern, denn er war jetzt im Besitz der Trigonometrie, die in der nichteuklidischen Geometrie gilt. Wir wissen dies nicht aus Aufzeichnungen oder Briefen von Gauss, sondern durch einen glücklichen Zufall. Ebenfalls im April 1816 hatte Gauss den Besuch seines Schülers Wachter erhalten, der auf der Reise nach Danzig, wo er Professor am Gymnasium illustre geworden war, Göttingen berührte[1]. Wachter hatte kurz vorher in der Zeitschrift für Astronomie und verwandte Wissenschaften eine Besprechung derselben Parallelentheorie von Metternich veröffentlicht, mit der Gauss sich in den Göttinger Nachrichten vom 20. April 1816 beschäftigt hat, und so ist es erklärlich, dass die Unterhaltung sich auch den Grundlagen der Geometrie zuwandte. Hierauf bezieht sich ein Brief von Wachter an Gauss vom 12. Dezember 1816, in dem jener über Untersuchungen berichtet, die er, angeregt durch das Gespräch, über die »antieuklidische Geometrie« angestellt hatte (W. VIII, S. 175). Wir erfahren hieraus, dass Gauss ihm von seiner transzendenten Trigonometrie gesprochen hatte; Wachter hatte sich vergeblich bemüht, einen Eingang in diese zu finden. Man wird daher annehmen dürfen, dass Gauss damals, wie er in einem bald darauf, am 16. März 1819, an Gerling geschriebenen Briefe sagt, die nichteuklidische Geometrie »so weit ausgebildet hatte, dass er alle Aufgaben vollständig lösen konnte, sobald die Konstante = C gegeben wird« (W. VIII, S. 182).

Die jetzt gewonnene feste Stellung gibt sich kund in dem Briefe an Olbers vom 28. April 1817: »Ich komme immer mehr zu der Überzeugung, dass die Notwendigkeit unserer Geometrie nicht bewiesen werden kann, wenigstens nicht vom menschlichen Verstande noch für den menschlichen Verstand. Vielleicht kommen wir in einem andern Leben zu andern Einsichten in das Wesen des Raums, die uns jetzt unerreichbar sind. Bis dahin müsste man die Geometrie nicht mit der Arithmetik, die rein a priori steht, sondern etwa mit der Mechanik in gleichen Rang setzen« (W. VIII, S. 177).

1 Vgl. hierfür wie für die folgenden Angaben den Aufsatz von P. Stäckel: *F. L. Wachter*, Math. Annalen, Bd. 54, 1901, S. 49—85.

Auf welchem Wege GAUSS zur nichteuklidischen Trigonometrie gelangt ist, lässt sich nicht mit Sicherheit sagen. Im Nachlass findet sich eine Herleitung der Formeln, die wahrscheinlich im Jahre 1846 niedergeschrieben ist (W. VIII, S. 255). In ihr wird das Verfahren der geometrischen Konstruktionen und daraus hergeleiteten Funktionalgleichungen angewandt, das GAUSS, wie wir gesehen haben, schon im Jahre 1803, freilich ohne Erfolg, benutzt hatte, und es liegt daher nahe anzunehmen, dass er in der Zeit zwischen 1813 und 1816 auf diesem Wege vorgegangen ist; allein man darf hierin nicht mehr als eine Vermutung erblicken.

B. Der Ausbau der nichteuklidischen Geometrie (seit 1817).

7.

Die Zeit der Geodäsie und die Flächentheorie; SCHWEIKART und TAURINUS (1817—1831).

Die Andeutungen über die Unbeweisbarkeit des Parallelenaxioms in der Anzeige vom Jahre 1816 hatten nicht den von GAUSS erwarteten Erfolg gehabt, und er hatte, das Geschrei der Böoter scheuend, sich entschlossen, bei Lebzeiten nichts über seine Ansichten bekannt zu machen. Um so mehr sehen wir ihn überrascht und erfreut, wenn er auf seinem einsamen Wege Gleichstrebende antrifft. Das ereignete sich mit SCHWEIKART und TAURINUS.

Der Rechtsgelehrte SCHWEIKART (1780—1859) hatte 1807 eine Schrift zur Parallelentheorie veröffentlicht[1], in der er beanstandete, dass man bei der üblichen Erklärung der Parallelen als einander nicht schneidender Geraden das Unendliche hereinziehe, und forderte, man solle beim Aufbau der Geometrie von der Existenz der Quadrate ausgehen[2]. Später, zwischen 1812 und 1816, hatte er »ohne Hilfe des elften EUKLIDischen Axioms eine Geometrie, die er Astralgeometrie nannte, entwickelt« (Brief von GERLING an W. BOLYAI vom 31. Oktober 1854, P. Th. S. 243) und, nachdem er 1816 aus Charkow an die

---

1) F. C. SCHWEIKART, *Die Theorie der Parallellinien, nebst dem Vorschlage ihrer Verbannung aus der Geometrie,* Jena und Leipzig 1807. Vgl. P. Th. S. 243—246.

2) In ähnlicher Weise war CLAIRAUT, *Éléments de Géométrie,* Paris 1741, davon ausgegangen, dass das Vorhandensein von Rechtecken durch die Anschauung gegeben sei, und hatte daraus mit grosser Klarheit die Sätze des ersten Buches der EUKLIDischen Element abgeleitet.

Universität Marburg berufen worden war, 1818 mit seinem Kollegen GERLING darüber gesprochen. »Ich erzählte ihm darauf, wie Sie vor einigen Jahren [1816] öffentlich geäussert hätten, dass man seit EUKLIDS Zeiten im Grunde hiermit nicht weiter gekommen sei: ja dass Sie gegen mich mehrmals geäussert hätten, wie Sie durch vielfältige Beschäftigung mit diesem Gegenstand auch nicht zum Beweis von der Absurdität einer solchen Annahme [einer nichteuklidischen Geometrie] gekommen seien« (Brief von GERLING an GAUSS vom 25. Januar 1819, W. VIII, S. 180). SCHWEIKART bat darauf GERLING, er möge eine kurze Aufzeichnung über seine »Astralische Grössenlehre« (W. VIII, S 180) an GAUSS weitergeben und diesen ersuchen, ihn gelegentlich sein Urteil wissen zu lassen. In seiner Antwort erklärt GAUSS, es sei ihm fast alles aus der Seele geschrieben (Brief vom 16. März 1819, W. VIII, S. 181). Er fand hier die Auffassung wieder, die er in dem Brief an OLBERS vom 28. April 1817 ausgesprochen hatte, und die er in dem Brief an BESSEL vom 9. April 1830 (W. VIII, S. 201) noch stärker betont hat, dass der Raum eine ausserhalb von uns vorhandene Wirklichkeit sei, der wir ihre Gesetze nicht vollständig vorschreiben können, deren Eigenschaften vielmehr nur auf Grund der Erfahrung vollständig festzustellen sind[1].

Das von SCHWEIKART gewählte Beiwort »astralisch« sollte ausdrücken, dass erst bei Abmessungen der Grössen, wie sie in der Sternenwelt vorkommen, Abweichungen von der EUKLIDischen Geometrie beobachtet werden könnten. Es scheint GAUSS gefallen zu haben, denn er hat es in späteren Aufzeichnungen angewendet (W. VIII, S. 232).

Ein Neffe von SCHWEIKART, ebenfalls ein Rechtsgelehrter, TAURINUS (1794 bis 1874) hatte sich als junger Mann, angeregt durch die Schrift seines Onkels, mit der Parallelentheorie beschäftigt und im Oktober 1824 einen Beweisversuch an GAUSS gesandt[2]; dass dieser sich mit den Grundlagen der Geometrie beschäftige, wusste er seit 1821 durch seinen Onkel. GAUSS, der in TAURINUS »einen denkenden mathematischen Kopf« erkannt hatte, antwortete in einem längeren Schreiben vom 8. November 1824; er hat darin seine Ansichten über das Parallelenaxiom ausführlich dargelegt, aber zugleich dem

---

1) Vgl. auch die gegen KANT gerichteten Bemerkungen W. II, S. 177 und W. VIII, S. 224.

2) Für die folgende Darstellung vgl. P. Th. S. 246—252 und den Aufsatz von P. STÄCKEL: *F. A. Taurinus*, Abhandlungen der Geschichte der Mathematik, Heft 9, Leipzig 1899, S. 397.

Empfänger des Briefes zur Pflicht gemacht, von dieser »Privat-Mitteilung auf keine Weise einen öffentlichen oder zur Öffentlichkeit führen könnenden Gebrauch zu machen« (W. VIII, S. 186—188).

Es muss hier genügen, aus dem Briefe die Hauptstellen anzuführen. »Die Annahme, dass die Summe der drei Winkel [des Dreiecks] kleiner sei als 180^0, führt auf eine eigene, von der unsrigen (euklidischen) ganz verschiedene Geometrie, die in sich selbst durchaus konsequent ist und die ich für mich selbst ganz befriedigend ausgebildet habe, so dass ich jede Aufgabe in derselben auflösen kann mit Ausnahme der Bestimmung einer Konstante, die sich a priori nicht ausmitteln lässt. Je grösser man diese Konstante annimmt, desto mehr nähert man sich der euklidischen Geometrie und ein unendlich grosser Wert macht beide zusammenfallen. . . . Wäre die nichteuklidische Geometrie die wahre, und jene Konstante in einigem Verhältnisse zu solchen Grössen, die im Bereich unserer Messungen auf der Erde oder am Himmel liegen, so liesse sie sich a posteriori ausmitteln«.

Die freundliche Antwort, die der erste Mathematiker der Zeit ihm zukommen liess, hat TAURINUS gewiss angespornt, seine Untersuchungen mit erhöhtem Eifer fortzusetzen. In seiner 1825 veröffentlichten *Theorie der Parallellinien* ist er zwar von der unbedingten Giltigkeit des Parallelenaxioms überzeugt, aber er beginnt die Folgen zu entwickeln, die sich aus dessen Verwerfung ergeben, und gelangt so seinerseits zu jener Konstanten, die einer (nichteuklidischen Geometrie eigen sein müsste; in der gleichzeitigen Möglichkeit unendlich vieler solcher Geometrien, die jede für sich genommen widerspruchslos sind, sieht er jedoch einen ausreichenden Grund, sie alle abzuweisen.

GAUSS, dem die Schrift zugesandt wurde, hat sich eben so wenig dazu geäussert wie zu einer zweiten, den 1826 veröffentlichten *Geometriae prima elementa*[1]). Hier ist TAURINUS auf die »neue Geometrie« genauer eingegangen und hat die Formeln der zugehörigen Trigonometrie sozusagen mit einem Schlage gewonnen, indem er in den entsprechenden Formeln der sphärischen Trigonometrie den Halbmesser der Kugel imaginär setzte. Aber noch mehr, er hat diese Formeln sogleich zur Lösung einer Reihe von Aufgaben ange-

1) Dies geht aus dem Briefe von TAURINUS an GAUSS vom 29. Dezember 1829 hervor (Brief im GAUSS-Archiv). Vermutlich hatte GAUSS daran Anstoss genommen, dass er von TAURINUS in der Vorrede zur *Theorie der Parallellinien* (S. XIII) und in der Vorrede der *Elementa* (S. V—VI) erwähnt worden war.

wandt und zum Beispiel den Umfang und den Inhalt des Kreises, die Oberfläche und das Volumen der Kugel richtig berechnet.

Die Gedanken von TAURINUS sind unbeachtet geblieben. »Der Erfolg bewies mir«, schreibt er am 29. Dezember 1829 an GAUSS, »dass Ihre Autorität dazu gehört, ihnen Anerkennung zu verschaffen, und dieser erste schriftstellerische Versuch ist, anstatt, wie ich gehofft hatte, mich zu empfehlen, für mich eine reiche Quelle von Unzufriedenheit geworden« (Brief im GAUSS-Archiv).

Im fünften Abschnitt dieses Aufsatzes wird ausführlich über die Untersuchungen berichtet werden, die GAUSS in der Zeit von 1816 bis 1827 über die allgemeine Lehre von den krummen Flächen angestellt hat. Erst dort soll auf die Zusammenhänge mit den Grundlagen der Geometrie eingegangen und im Besonderen die Frage erörtert werden, ob GAUSS die Beziehung zwischen der absoluten Geometrie und der Geometrie auf den Flächen konstanten Krümmungsmasses gekannt hat. Auch die Ansichten von GAUSS über mehrdimensionale Mannigfaltigkeiten werden dann zur Sprache kommen.

Bald nach der Vollendung der *Disquisitiones generales circa superficies curvas* (Oktober 1827), die, wie GAUSS am 11. Dezember 1825 an HANSEN schrieb, »tief in vieles Andere, ich möchte sogar sagen, in die Metaphysik der Raumlehre eingreifen« (Brief im GAUSS-Archiv), hat sich GAUSS erneut den Grundlagen der Geometrie zugewandt. Am 27. Januar 1829 berichtet er an BESSEL: »Auch über ein anderes Thema, das bei mir fast schon 40 Jahr alt ist, habe ich zuweilen in einzelnen freien Stunden wieder nachgedacht, ich meine die ersten Gründe der Geometrie. . . . Inzwischen werde ich wohl noch lange nicht dazu kommen, meine sehr ausgedehnten Untersuchungen darüber zur öffentlichen Bekanntmachung auszuarbeiten, und vielleicht wird dies auch bei meinen Lebzeiten nie geschehen, da ich das Geschrei der Böoter scheue, wenn ich meine Ansicht ganz aussprechen wollte« (W. VIII, S. 200).

Von den Untersuchungen, auf die GAUSS hindeutet, ist uns nur eine kurze Notiz vom November 1828 erhalten, in der unabhängig vom elften Axiom bewiesen wird, dass die Winkelsumme des Dreiecks nicht grösser sein kann, als zwei Rechte (W. VIII, S. 190[1]). Aber im April 1831 hat er begonnen, einiges von seinen Meditationen aufzuschreiben. »Ich wünschte doch, dass es

1) Dasselbe Verfahren hatte schon LEGENDRE in der zweiten Auflage der *Éléments de géométrie* (1798) angewandt.

nicht mit mir unterginge« (Brief an SCHUMACHER vom 17. Mai 1831, W. VIII, S. 213).

Als diese Niederschriften darf man drei Zettel ansprechen, die aus dem Nachlass W. VIII, S. 202—209 abgedruckt sind. In der Notiz [3], die wohl die früheste ist, und von der [1] und [2] nur genauere Ausführungen sind[1], werden die grundlegenden Eigenschaften der parallelen oder, nach JOHANN BOLYAI, asymptotischen Geraden hergeleitet, und in der letzten Nummer gelangt GAUSS zu dem Parazykel, der Kurve, in die der Kreis übergeht, wenn der Halbmesser unendlich wird. Er nennt sie Trope, also Wendekreis (cercle tropique), ein deutliches Zeichen, dass er den Parazykel als den Übergang von den eigentlichen Kreisen zu den Hyperzykeln aufgefasst hat. Der Gang der Entwicklung hat grosse Ähnlichkeit mit dem von JOHANN BOLYAI in der *Scientia spatii.*

Ein Ersatz für weitere Aufzeichnungen, freilich ein spärlicher, ist der Brief an SCHUMACHER vom 12. Juli 1831, in dem GAUSS die Folgen bespricht, die das Aufhören der Ähnlichkeit in der nichteuklidischen Geometrie nach sich zieht, und die dort geltende Formel für den Umfang des Kreises angibt (W. VIII, S. 215). Es ist leider nur wenig, was wir von jenen sehr ausgedehnten Untersuchungen wissen, und auch aus den folgenden Jahren wird nur wenig hinzukommen.

8.

Die weitere Entwicklung bei GAUSS: JOHANN BOLYAI und LOBATSCHEFSKIJ (1831—1846).

Am 3. November 1823 hatte JOHANN BOLYAI aus Temesvar, wo er als Pionierleutnant stand, seinem Vater mitgeteilt, er habe »aus Nichts eine neue, andere Welt geschaffen«. Im Februar 1825 konnte er ihm den ersten Entwurf seiner absoluten Raumlehre vorlegen. WOLFGANG war jedoch damit nicht einverstanden; besonders nahm er Anstoss an dem Auftreten der an sich unbestimmten Konstanten und der dadurch bedingten Vielheit der möglichen hypothetischen Systeme (BOL. S. 87). Vater und Sohn konnten sich nicht

1) Nach einer brieflichen Mitteilung von H. S. CARSLAW (Sydney) ist in Nr. 4 der Notiz [3] der Fall übersehen, dass die Geraden cb und $\imath$ einander nicht schneiden; diese Lücke ist in der Notiz [1], Nr. 4, Fall II ausgefüllt.

einigen, und schliesslich kam man überein, Johann möge das Wesen der Sache in lateinischer Sprache darstellen, die kleine Abhandlung solle dem von Wolfgang geplanten *Tentamen*[1] beigegeben und einer der herzustellenden Abzüge an Gauss gesandt werden: seinem Urteil über Wert oder Unwert wollten sich beide unterwerfen.

Im Juni 1831 wurden die Sonderabzüge des *Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens* fertig, und am 20. Juni wurde einer davon an Gauss abgesandt. Jedoch gelangte »der fatalen Choleraumstände wegen« nur der gleichzeitig abgegangene Brief an Gauss in dessen Hände, an dessen Schluss Wolfgang, wie er an Johann schrieb, »eine kleine, klare Idee der Arbeit gab, damit er nicht im voraus sich grause vor der Materie«. Der Sonderabzug selbst kam nach längerer Zeit an Wolfgang zurück und ist Anfang Februar 1832 durch einen Bekannten der Bolyais, den in Göttingen studierenden Baron v. Zeyk, Gauss übergeben worden (Bol. S. 91—92).

Unter dem ersten Eindruck, den die Schrift auf ihn machte, schrieb Gauss am 14. Februar 1832 an Gerling: »Noch bemerke ich, dass ich dieser Tage eine kleine Schrift aus Ungarn über die nichteuklidische Geometrie erhalten habe, worin ich alle meine eigenen Ideen und Resultate wiederfinde, mit grosser Eleganz entwickelt, obwohl in einer für jemand, dem die Sache fremd ist, wegen der Konzentrierung etwas schwer zu folgenden Form. Der Verfasser ist ein sehr junger österreichischer Offizier, Sohn eines Jugendfreundes von mir, mit dem ich 1798 mich oft über die Sache unterhalten hatte, wiewohl damals meine Ideen noch viel weiter von der Ausbildung und Reife entfernt waren, die sie durch das eigene Nachdenken dieses jungen Mannes erhalten haben. Ich halte diesen jungen Geometer v. Bolyai für ein Genie erster Grösse« (W. VIII, S. 220).

Am 6. März folgte der wiederholt angeführte Brief an Wolfgang, in dem Gauss seine Überraschung über das Zusammentreffen mit Johann ausdrückt und bittet, diesen herzlich von ihm zu grüssen und ihm seine besondere Hochachtung zu versichern (W. VIII, S. 220—224). »Gaussens Antwort hinsichtlich Deines Werkes«, schrieb Wolfgang an den Sohn, »ist sehr schön und gereicht unserem Vaterlande und unserer Nation zur Ehre. Ein guter Freund sagt,

---

1) W. Bolyai, *Tentamen iuventutem studiosam in elementa matheseos . . . introducendi,* t. I, Maros Vásárhely 1832, ed. secunda, Budapest 1897.

es wäre eine grosse Satisfaktion« (Bol. S. 72). Johann selbst hat es als eine grosse Enttäuschung und Kränkung empfunden, dass Gauss den *Appendix* keiner öffentlichen Anerkennung würdigte und das Vorrecht der ersten Entdeckung für sich in Anspruch nahm (Bol. S. 95—97).

Wie schon erwähnt wurde, gibt Gauss in dem Briefe als Probe ihm eigentümlicher Untersuchungen einen einfachen Beweis für den Satz, dass in der nichteuklidischen Geometrie der Inhalt des Dreiecks der Abweichung der Winkelsumme von zwei Rechten proportional ist; der Umstand, dass damals die Erinnerungen an den Verkehr mit Wolfgang in ihm wiederauftauchten, macht es wahrscheinlich, dass er dabei an seine Untersuchungen vom September 1799 angeknüpft hatte. Er schliesst daran die Aufforderung, Johann möge sich mit der entsprechenden Aufgabe für den Raum beschäftigen, nämlich »den Kubikinhalt des Tetraeders (von vier Ebenen begrenzten Raumes) zu bestimmen«. Johann hatte, wie sein Vater am 20. April 1835 an Gauss schreibt (Br. G.-Bolyai, S. 115), die Auflösung der Aufgabe bereits ein Jahr vor der Herausgabe des *Appendix* gefunden. Der Nachlass Johanns enthält in der Tat sogar mehrere Verfahren, die zur Lösung dienen können (Bol. S. 109—118), darunter auch genau die Methode, die Gauss im Auge hatte und die er, seiner oben (S. 17, 18) erwähnten Gewohnheit gemäss, bei der Absendung des Briefes an Wolfgang vom 6. März 1832 in einem seiner Handbücher angedeutet hat (W. VIII, S. 228).

Auf das Volumen des Tetraeders bezieht sich noch eine zweite Aufzeichnung von Gauss, die etwa aus dem Jahre 1841 stammt. Sie steht auf einem Zettel, der sich in dem Sonderabdruck der Abhandlung Lobatschefskijs vom Jahre 1836 über die Anwendung der imaginären Geometrie auf einige Integrale gefunden hat; unter imaginärer Geometrie versteht der russische Mathematiker die nichteuklidische Geometrie.

Lobatschefskij (1793—1856) hatte in den Vorlesungen über Geometrie, die er 1815/16 an der Universität Kasan hielt, noch ganz auf dem Boden der euklidischen Geometrie gestanden und darin verschiedene Versuche zum Beweise des Parallelenaxioms gemacht (Lob. S. 262, 378). Verraten schon diese Vorlesungen eine eingehende Beschäftigung mit Legendres *Elementen der Geometrie* (Lob. S. 454), so lassen die späteren Schriften Lobatschefskijs erkennen, dass er sich in den folgenden Jahren in tief eindringender Kritik mit Legendre

auseinandergesetzt und, indem er es wagte, Folgerungen aus der Annahme des Nichtbestehens des Parallelenaxioms zu ziehen, sich allmählich mit dem Gedanken von dessen Unbeweisbarkeit vertraut gemacht hat. Diesen Standpunkt vertritt er in einem ungedruckt gebliebenen Lehrbuch der Geometrie vom Jahre 1823 (Lob. S. 369). In den folgenden Jahren gelangte er zu der Erkenntnis, dass es eine in sich widerspruchsfreie Geometrie gibt, die des Parallelenaxioms nicht bedarf. Er entwickelte diese Geometrie soweit, dass er alle ihre Aufgaben rein analytisch behandeln konnte; auch gab er allgemeine Regeln zur Berechnung der Bogenlängen, Flächenräume und Rauminhalte. Die Ergebnisse dieser Untersuchungen wurden am 12. Februar 1826 der Kasaner Gelehrten Gesellschaft vorgelegt; veröffentlicht sind sie jedoch erst 1829 und 1830 im Kasaner Boten (Lob. S. 371). Ihnen folgte eine Reihe weiterer, in russischer Sprache geschriebener Abhandlungen (1835—1838).

Um seinen Gedanken Verbreitung im westlichen Europa zu verschaffen, hatte Lobatschefskij 1837 in Crelles Journal eine kurze Darstellung seiner imaginären Geometrie gegeben, die freilich zur Einführung in den Gegenstand wenig geeignet war. Gauss scheint sie nicht beachtet zu haben, er ist vielmehr wohl erst im Jahre 1840 auf Lobatschefskij aufmerksam geworden, als dessen vortrefflich geschriebene deutsche Schrift: *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien*, in Gersdorfs Repertorium abfällig besprochen wurde (Brief an Encke vom 1. Febr. 1841, W. VIII, S. 232). Durch einen merkwürdigen Zufall erhielt er um dieselbe Zeit durch den mit Lobatschefskij befreundeten Physiker der Kasaner Universität Knorr, der ihn 1840 in Göttingen besucht hatte, die schon erwähnte Abhandlung vom Jahre 1836. Später hat ihm der Astronom W. Struve in Pulkowa die anderen, in den Kasaner Gelehrten Schriften erschienenen Abhandlungen verschafft (W. VIII, S. 239); woher Gauss die Abhandlung im Kasaner Boten vom Jahre 1829/30 bekommen hat, ist unaufgeklärt (Lob. S. 435).

Ein weiterer glücklicher Umstand war es, dass Gauss die in russischer Sprache geschriebenen Schriften lesen konnte. »Die Aneignung irgend einer neuen Fertigkeit als eine Art Verjüngung betrachtend« (Brief an Schumacher vom 17. August 1839, Br. G.-Sch. III, S. 242) hatte er, nachdem er dem Sanskrit keinen Geschmack abgewinnen konnte, im Frühjahr 1839 angefangen, die russische Sprache zu erlernen. »Es dauerte kaum zwei Jahre, dass er ohne

alle fremde Hilfe dieselbe so vollständig in seine Gewalt bekam, dass er nicht nur alle Bücher in Prosa und Poesie mit Geläufigkeit lesen konnte, sondern dass er sogar seine Korrespondenzen nach St. Petersburg mitunter in russischer Sprache besorgte« (SARTORIUS, S. 91).

Über die russischen Abhandlungen urteilt GAUSS in dem Brief an GERLING vom 8. Februar 1844, dass sie »mehr einem verworrenen Walde gleichen, durch den es, ohne alle Bäume erst einzeln kennen gelernt zu haben, schwer ist, einen Durchgang und Übersicht zu finden« (W. VIII, S. 237). Dagegen lobt er die Konzinnität und Präzision der *Geometrischen Untersuchungen* und wiederholt dieses Lob in dem Brief an SCHUMACHER vom 28. November 1846: »Materiell für mich Neues habe ich .... nicht gefunden, aber die Entwicklung ist auf anderm Wege gemacht, als ich selbst eingeschlagen habe, und zwar von LOBATSCHEFSKIJ auf eine meisterhafte Art in echt geometrischem Geiste. Ich glaube Sie auf das Buch aufmerksam machen zu müssen, welches Ihnen gewiss ganz exquisiten Genuss gewähren wird« (W. VIII. S. 238).

Auf einem Zettel, der sich in einem der beiden GAUSS gehörenden Abdrücke der *Geometrischen Untersuchungen* vorgefunden hat, ist in gedrängter Darstellung die bereits erwähnte (S. 31) Herleitung der Formeln der nichteuklidischen Trigonometrie enthalten (W. VIII, S. 255—257); vermutlich ist sie verfasst worden, als GAUSS im Jahre 1846 »Veranlassung hatte, das Werkchen wieder durchzusehen« (W. VIII, S. 238). Wenn dort (S. 31) bemerkt wurde, dass die Aufzeichnung wohl den Gedankengang wiedergebe, den GAUSS im Jahre 1816 eingeschlagen hat, so muss hier hervorgehoben werden, dass darin auch eine Auffassung zu Tage tritt, die GAUSS erst später gewonnen hat. Als Endergebnis werden nämlich Formeln erhalten, die mit den Gleichungen der sphärischen Trigonometrie, bezogen auf eine Kugel vom Halbmesser $1/k$, identisch sind; die entsprechenden Gleichungen der nichteuklidischen Trigonometrie folgen daraus, wenn der Konstanten k ein rein imaginärer Wert erteilt wird. Dass diese Beziehung stattfindet, hatte LOBATSCHEFSKIJ am Schluss der geometrischen Untersuchungen (S. 60) angemerkt. Sie erscheint bei ihm als ein sonderbarer Zufall. Hat GAUSS tiefer geschaut? Hat er durch den Buchstaben k andeuten wollen, dass die beiden Geometrien dem allgemeineren Begriff der Geometrie einer Mannigfaltigkeit konstanten Krümmungsmasses untergeordnet werden können? Wie im fünften Abschnitt dieses Aufsatzes

dargelegt werden wird, spricht vieles dafür, die Frage zu bejahen. Dann aber würde ein Licht fallen auf eine dunkle Stelle in dem vorher angeführten Brief an SCHUMACHER vom 28. November 1846: »Sie wissen, dass ich schon seit 54 Jahren (seit 1792) dieselbe Überzeugung habe (mit einer gewissen spätern Erweiterung, deren ich hier nicht erwähnen will)« (W. VIII, S. 238). Darf man noch weiter gehen? Hat GAUSS seine ursprüngliche Überzeugung später dahin erweitert, dass er den Geometrien, die sich je nach dem Vorzeichen des Krümmungsmasses ergeben, volle Gleichberechtigung zubilligte, hat er den Gedanken RIEMANNS vorausgenommen, man brauche den Raum nur als unbegrenzte, nicht als unendliche Mannigfaltigkeit aufzufassen? Die vorliegenden Anhaltspunkte gestatten es nur, Vermutungen auszusprechen.

Als JOHANN BOLYAI am 3. November 1823 dem Vater von seinen neuen Entdeckungen berichtet hatte (BOL. S. 85), ermahnte ihn dieser, sich mit der Bekanntmachung zu beeilen, weil »manche Dinge gleichsam eine Epoche haben, wo sie dann an mehreren Orten aufgefunden werden, gleichwie im Frühjahr die Veilchen mehrwärts ans Licht kommen« (BOL. S. 86). Die Namen GAUSS, SCHWEIKART, TAURINUS, LOBATSCHEFSKIJ sind ein Beweis dafür, wie richtig WOLFGANG geurteilt hatte.

Man hat allerdings dieses Zusammentreffen dadurch seiner Merkwürdigkeit zu entkleiden versucht, dass man vermutete, BOLYAI und LOBATSCHEFSKIJ verdankten GAUSS, der ohne Zweifel als Erster sich von den Fesseln der Überlieferung frei gemacht hat, die Fragestellung ihrer Untersuchungen (LOB. S. 428, 442). Dass SCHWEIKART von GAUSS unabhängig gewesen ist, unterliegt keinem Zweifel; dagegen sind bei TAURINUS Anregungen durch SCHWEIKART und GAUSS wirksam gewesen, ohne dass ihm damit die Selbständigkeit in der Entdeckung der nichteuklidischen Trigonometrie abgesprochen werden darf.

Nachdem die hinterlassenen Schriften von GAUSS und den beiden BOLYAI zugänglich geworden sind, können die Beziehungen zwischen ihnen als völlig geklärt gelten; man beachte vor allem die beiden Tatsachen, dass WOLFGANG, als GAUSS im Herbst 1798 Göttingen verlassen hatte, das Parallelenaxiom zu beweisen bemüht war, und dass, wie die S. 48 wiedergegebene Stelle aus einem Briefe WOLFGANGS beweist, JOHANN erst, nachdem er seine Untersuchungen bereits begonnen hatte, von seinem Vater die Mitteilung erhielt, GAUSS habe

fruchtlos über die Parallelen nachgedacht, eine Warnung eher, denn eine Anregung.

Bei LOBATSCHEFSKIJ hat man an eine Vermittlung durch BARTELS (1769—1836) gedacht, der 1807 bis 1821 an der Universität Kasan gelehrt hat. BARTELS ist nämlich Hilfslehrer an der Schule gewesen, an der GAUSS seinen ersten Unterricht empfing und hat sich des Knaben hilfreich angenommen; später, 1805 bis 1807, wo er als ein Schützling des Herzogs, wie GAUSS, in Braunschweig lebte, hat er mit diesem freundschaftlich verkehrt. Wenn aber schon die ganze Entwicklung der Gedanken, wie sie vorher dargestellt worden ist, für die volle Selbständigkeit LOBATSCHEFSKIJS spricht, so kommt noch dazu, dass BARTELS, nach dem Zeugnis seines Schwiegersohnes O. STRUVE, in der imaginären Geometrie mehr eine geistreiche Spekulation als ein die Wissenschaft förderndes Werk gesehen hat; auch erinnert sich STRUVE nicht, dass BARTELS jemals von anklingenden Ideen bei GAUSS gesprochen habe (LOB. S. 378—382).

9.

Nachwirkung der Gaussschen Gedanken.

Bei der Zurückhaltung, die sich GAUSS zur Regel gemacht hatte, haben während seines Lebens nur wenige Bevorzugte etwas von seinen Ansichten über die Grundlagen der Geometrie erfahren, und die Eingeweihten haben ihr Wissen für sich behalten. Zum Beispiel hat DIRICHLET, mit dem GAUSS bei dessen Besuch im März 1827 von der nichteuklidischen Geometrie gesprochen hatte (W. VIII, S. 188), untersucht, wie sich die Potentialtheorie im nichteuklidischen Raume gestalte, aber nichts darüber veröffentlicht (LOB. S. 441). In weiteren Kreisen wurde erst etwas davon bekannt, als SARTORIUS 1856 in seiner Schrift *Gauss zum Gedächtniss* berichtete, GAUSS habe eine selbständige Geometrie ausgebildet, die gelte, wenn man das Parallelenaxiom nicht zugebe (W. VIII, S. 267—268). Diese Andeutung wurde bald darauf bestätigt durch den 1860 herausgekommenen zweiten Band des Briefwechsels zwischen GAUSS und SCHUMACHER (Briefe vom Jahre 1831, W. VIII, S. 210—219), und 1863 erschien der fünfte Band mit dem Briefe vom 28. November 1846 (W. VIII, S. 238), durch den die Aufmerksamkeit auf LOBATSCHEFSKIJ gelenkt wurde. Nachdem jetzt, um mit HOÜEL zu reden, die imposante Autorität GAUSSENS

gesprochen hatte, fand der Hinweis auf J. BOLYAI und LOBATSCHEFSKIJ Beachtung, den BALTZER 1867 in der zweiten Auflage seiner *Elemente der Mathematik* gab; durch ihn angeregt veröffentlichte HOÜEL französische Übersetzungen der *Geometrischen Untersuchungen* und der *Scientia spatii absolute vera* und machte so diese verschollenen Schriften allgemein zugänglich. Damit war der Boden vorbereitet für eine verständnisvolle Aufnahme der zu derselben Zeit aus RIEMANNS Nachlass herausgegebenen Habilitationsrede vom Jahre 1854: *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen;* dazu kamen 1868 die Aufsätze von HELMHOLTZ. Während man bis dahin die Beschäftigung mit dem elften Axiom als ein Vorrecht unklarer Köpfe angesehen und mit den Bemühungen um die Quadratur des Kreises und das Perpetuum mobile auf eine Stufe gestellt hatte, erregten jetzt die Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie allgemeine Teilnahme, und als später noch die Kritik der Arithmetik hinzukam, entstand ein neuer Zweig der Mathematik, der als Axiomatik bezeichnet wird.

C. Sonstige Beiträge zur Axiomatik.

10.

Weitere Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie.

Wenn von den Untersuchungen die Rede ist, die GAUSS über die Grundlagen der Geometrie angestellt hat, so denkt man dabei vor allem an die Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie. GAUSS hat sich jedoch keineswegs auf das Parallelenaxiom beschränkt, er hat sich vielmehr noch mit einer Reihe anderer Fragen beschäftigt, die man heute ebenfalls der Axiomatik zuweisen würde. Hierüber soll zum Schluss dieses Abschnittes berichtet werden.

Es kann nicht Wunder nehmen, dass die üblichen Darstellungen der euklidischen Geometrie einen Mann, der an die Schärfe der Begriffsbestimmungen und die Strenge der Ableitungen hohe Forderungen stellte, in mehr als einem Punkte nicht befriedigten. Sein tiefdringender Blick erkannte hier Lücken, die zum Teil erst nach Jahrzehnten von anderen Geometern aufgedeckt worden sind. Zum Beispiel spricht GAUSS in dem Brief an BOLYAI vom 6. März 1832 von dem »Teil des Planums, der zwischen drei Geraden liegt« und macht dazu die Anmerkung: »Bei einer vollständigen Durchführung müssen solche Worte

wie zwischen auch erst auf klare Begriffe gebracht werden, was sehr gut angeht, was ich aber nirgends geleistet finde« (W. VIII, S. 222).

Die Erklärung der geraden Linie war Gegenstand des Gespräches gewesen, das GAUSS und WOLFGANG BOLYAI bei ihrem ersten gemeinsamen Spaziergange im Herbst 1796 geführt hatten. Wie JOHANN BOLYAI erzählt, erwiderte GAUSS auf die Äusserungen WOLFGANGS: »Ja wahrlich, die Gerade wird schändlich behandelt; sie ist in der Tat die Linie, welche sich in sich selbst dreht« (BOL. S. 197). Dieselbe Erklärung hat GAUSS in einer Vorlesung über praktische Astronomie gegeben, die LÜBSEN im Jahre 1830 bei ihm gehört hat (W. VIII, S. 196); auch die weitere Bemerkung bei LÜBSEN, das angegebene Merkmal sei praktisch wichtig, z. B. bei der Justierung eines Fernrohres, bei der richtigen Bohrung eines Zylinders usw., ist wohl GAUSSschen Ursprungs.

Im *Tagebuch* steht unter dem 28. Juli 1798 die Eintragung: »Plani possibilitatem demonstravi« (T. Nr. 72). Was GAUSS hiermit meinte, zeigt eine Stelle in dem Briefe an BESSEL vom 27. Januar 1829, die Erklärung der Ebene als einer Fläche, in der die irgend zwei Punkte verbindende gerade Linie ganz liegt, enthalte mehr, als zur Bestimmung der Fläche nötig ist, und involviere tacite ein Theorem, das erst bewiesen werden müsse (W. VIII, S. 200); in ähnlicher Weise äussert sich GAUSS auch in einer wohl aus der gleichen Zeit stammenden Aufzeichnung (W. VIII, S. 194). Auch in dem Brief an W. BOLYAI vom 6. März 1832 erklärt es GAUSS für unerlässlich, »die Möglichkeit eines Planums zu erweisen« (W. VIII, S. 224). Ein solcher Beweis steht im Handbuch 19 Be, S. 153 (W. VIII, S. 194); durch die unmittelbar vorhergehenden Notizen, die den Dreiecks-Inhalt und das Tetraeder-Volumen in der nichteuklidischen Geometrie betreffen (W. VIII, S. 226—228), ist als Zeit der Niederschrift der März 1832 gesichert. Die Ebene denkt sich GAUSS erzeugt durch die Drehung des einen Schenkels eines rechten Winkels um den anderen, festgehaltenen Schenkel. Auf Anregungen von GAUSS gehen wohl auch die Abhandlungen von DEAHNA (1837) und GERLING (1840) über die Erklärung der Ebene zurück[1]).

---

1) DEAHNA, *Demonstratio theorematis esse superficiem planam*, Marburg 1837; CHR. L. GERLING, *Fragment über die Begründung des Begriffs der Ebene*, CRELLES Journal, Bd. 20, 1840, S. 332. BALTZER bemerkt in der zweiten Auflage seiner *Elemente*, Bd. II, 1867, § 1, GAUSS sei der Meinung gewesen, DEAHNAS

Bei der Lehre von den Vielecken pflegt man stillschweigend oder ausdrücklich voraussetzen, dass der Umfang sich selbst nicht schneidet. Gauss hat schon früh die Frage ins Auge gefasst, was man unter dem Inhalt eines beliebigen Vielecks zu verstehen habe; in Nr. 24 dieses Aufsatzes wird man hierüber Genaueres finden. Bei seinen Untersuchungen über die allgemeine Lehre von den krummen Flächen ist er auf den Gegenstand zurückgekommen und hat beliebige Figuren betrachtet, deren Umfang sich selbst schneidet (Brief an Olbers vom 20. Oktober 1825, Br. G.-O. 2, S. 431, W. VIII, S. 399; vgl. auch W. IV, S. 227). Auch die Zerlegung der Vielecke in Dreiecke hat er untersucht (W. VIII, S. 280); sein Verfahren führt zu einer Herleitung der Winkelsumme des n-Ecks, die dem üblichen, unzulänglichen Induktionsbeweise vorzuziehen ist.

Eine Anfrage Gerlings vom 20. Juni 1846 über die Unterscheidung rechts- und linksgewundener Schrauben (W. VIII, S. 247) veranlasste Gauss zu Ausführungen über die Begriffe rechts und links, die er »ein Kernstück eines viel ausgedehntern Systems« nennt (Brief vom 23. Juni 1846, W. VIII, S. 249). Er war bereits in der Selbstanzeige der zweiten Abhandlung über die biquadratischen Reste vom 15. April 1831 (W. II, S. 177), in der er seine geometrische Versinnlichung der komplexen Grössen darlegt, auf den Unterschied von rechts und links eingegangen und hatte bemerkt, dieser Unterschied sei »sobald man vorwärts und rückwärts in der Ebene und oben und unten in Beziehung auf die beiden Seiten der Ebene einmal (nach Gefallen) festgesetzt hat, in sich völlig bestimmt, wenn wir gleich unsere Anschauung dieses Unterschiedes andern nur durch Nachweisung an wirklich vorhandenen materiellen Dingen mitteilen können«. In einer Fussnote hatte er hinzugefügt: »Beide Bemerkungen hat schon Kant gemacht, aber man begreift nicht, wie dieser scharfsinnige Philosoph in der ersteren einen Beweis für seine Meinung, dass der Raum nur Form unserer äusseren Anschauung sei, zu finden glauben konnte, da die zweite so klar das Gegenteil und dass der Raum unabhängig von unserer Anschauungsart eine reelle Bedeutung haben muss, beweiset« (vgl. auch W. X 1, S. 409); eine ähnliche Bemerkung enthält der Brief an

Darstellung lasse sich von einigen Mängeln, die in ihr anzutreffen seien, befreien; vgl. auch W. Killing, *Einführung in die Grundlagen der Geometrie*, Bd. II, Paderborn 1898, S. 183.

SCHUMACHER vom 8. Februar 1846 (W. VIII, S. 247)[1]. Einen zweiten Grund gegen KANTS Meinung hat GAUSS in dem Brief an W. BOLYAI vom 6. März 1832 vorgebracht. »Gerade in der Unmöglichkeit zwischen Σ [Euklidischer Geometrie] und S [nichteuklidischer Geometrie] a priori zu entscheiden, liegt der klarste Beweis, dass KANT Unrecht hatte zu behaupten, der Raum sei nur Form unserer Anschauung« (W. VIII, S. 224).

In dasselbe Kapitel wie die Erörterungen über die Begriffe von Rechts und Links gehören die Einführung der gerichteten geraden Linien (W. VIII, S. 408), die Unterscheidung zwischen den beiden zu einem grössten Kreise der Kugel gehörenden Polen (W. VII, S. 177, IV, S. 221) und die Sätze, dass symmetrische sphärische Dreiecke flächengleich, symmetrische Raumstücke volumengleich sind. GERLING hatte den ersten Satz durch Zerlegung in Teil-Dreiecke bewiesen, die paarweise kongruent sind (Brief an GAUSS vom 25. März 1813, W. VIII, S. 240). Als er am 26. Februar 1844 darauf zurückkam, forderte ihn GAUSS auf, den zweiten zu beweisen (Brief vom 8. April 1844, W. VIII, S. 241). GERLING konnte auch hier zeigen, dass die Gebilde sich in Pyramiden zerlegen lassen, die paarweise kongruent sind (Brief vom 15. April 1844, W. VIII, S. 242)[2]. Nunmehr warf GAUSS die Frage auf, ob man in ähnlicher Weise, unabhängig von der Exhaustionsmethode, zeigen könne, dass Pyramiden von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe gleichen Rauminhalt haben (Brief vom 17. April 1844, W. VIII, S. 244)[3], aber hier gelangte GERLING nicht zum Ziele (Brief vom 7. Juli 1844, W. VIII, S. 245). Durch die Herausgabe der bis dahin unbekannten Briefe von GAUSS und GERLING im achten Bande der Werke (1900) wurde die Aufmerksamkeit auf die Frage der Volumengleichheit der Polyeder gelenkt, und so könnte man letzten Endes

---

1) Vgl. noch E. STUDY, *Die Begriffe Links, Rechts, Windungssinn und Drehungssinn*, Archiv der Mathematik und Physik, 3. Reihe, Bd. 21, 1913, S. 193; hier wird auf den Briefwechsel zwischen GAUSS und GERLING ausführlich Bezug genommen.

2) GERLINGS Beweis ist von HESSEL vereinfacht worden: *Einige neue Beweise von Lehrsätzen aus der Elementar-Stereometrie*, Archiv der Mathematik und Physik, 1. Reihe, Bd. 7, 1846, S. 284; HESSEL bemerkt, dass GERLING durch GAUSS zu seinen Untersuchungen veranlasst worden sei.

3) Es ist nicht ausgeschlossen, dass GAUSS diese Fragestellung dem *Tentamen* WOLFGANG BOLYAIS verdankte; dieser hatte die Frage von der »endlichen Gleichheit« bei Flächenstücken ausführlich untersucht und dazu bemerkt, ob eine beliebige dreiseitige Pyramide durch endliche Gleichheit auf ein Prisma zurückgeführt werden könne oder nicht, sei noch nicht klargestellt (*Tentamen*, t. II, S. 175, ed. secunda, Budapest 1904, S. 241; vgl. BOL. S. 40 und 188).

den Beweis DEHNS, dass die Exhaustionsmethode bei der Volumenbestimmung unentbehrlich ist[1], auf eine Anregung von GAUSS zurückführen.

Abschnitt II.

Geometria situs.

11.

Allgemeines über die Geometria situs bei GAUSS.

Von den Schriften, die GAUSS veröffentlicht hat, bezieht sich keine unmittelbar auf die Geometria situs, und doch hat dieser Gegenstand ihn sein ganzes Leben hindurch beschäftigt. Aus Gesprächen mit GAUSS, die in dessen letzte Lebensjahre, 1847 bis 1855, fallen, berichtet SARTORIUS v. WALTERSHAUSEN: »Eine ausserordentliche Hoffnung setzte er auf die Ausbildung der Geometria situs, in der weite, gänzlich unangebaute Felder sich befänden, die durch unseren gegenwärtigen Kalkül noch so gut wie garnicht beherrscht werden könnten« (SARTORIUS, S. 88). Eine ganz ähnliche Äusserung hatte er aber etwa 50 Jahre früher getan. Am 12. Oktober 1802 schrieb er an OLBERS: ». . . auch werde nächstens ein Werk von CARNOT, *Géométrie de position*[2]) herauskommen, worauf ich überaus begierig hin. Dieser bisher fast ganz brachliegende Gegenstand, über den wir nur einige Fragmente von EULER und einem von mir sehr hochgeschätzten Geometer VANDERMONDE haben, muss ein ganz neues Feld eröffnen und einen ganz eigenen, höchst interessanten Zweig der erhabenen Grössenlehre bilden« (Br. G.-O. 1, S. 103).

1) M. DEHN, *Über raumgleiche Polyeder*, Göttinger Nachrichten 1900, S. 345; *Über den Rauminhalt*, Math. Annalen, Bd. 55, 1901, S. 465; vgl. jedoch schon R. BRICARD, *Sur une question de géométrie rélative aux polyèdres*, Nouv. ann. de math., série 3, t. 15, 1896, S. 331 und G. SFORZA, *Un' osservazione sull' equivalenza dei poliedri per congruenza delle parti*, Periodico di mat., t. 12, 1897, S. 105.

2) L. CARNOT, *Géométrie de position*, Paris 1803; ins Deutsche übersetzt von H. C. SCHUMACHER, 2 Bände, Altona 1810. Unter Géométrie de position versteht jedoch CARNOT etwas anderes als die Geometria situs, nämlich Untersuchungen, die sich auf die Anwendung negativer Zahlen in der Geometrie beziehen. Später hat man vielfach auch die projektive Geometrie als Geometrie der Lage bezeichnet und ihr die Geometrie des Masses gegenübergestellt, was ebenfalls mit der Geometria situs im Sinne von GAUSS nichts zu tun hat.

In der Tat hatte EULER die Frage behandelt, ob es möglich sei, die sieben Brücken, die in Königsberg i. Pr. über die Pregelarme führen, hinter einander und jede nur einmal zu überschreiten[1]. Er hatte ferner die grundlegende Beziehung zwischen den Anzahlen der Ecken, Kanten und Seitenflächen eines konvexen Polyeders entdeckt und bewiesen[2]. Endlich hatte er sich mit den Rösselsprüngen auf dem Schachbrett befasst[3]. An ihn anknüpfend hatte VANDERMONDE die mathematische Behandlung des Rösselsprunges gefördert und sein Verfahren auf die analytische Darstellung von Geweben ausgedehnt[4].

Es seien noch zwei Äusserungen von GAUSS angeführt, die aus der Mitte seiner Lebensbahn überliefert sind.

Am 30. Oktober 1825 berichtet GAUSS seinem Freunde SCHUMACHER, dass er in den Untersuchungen über die allgemeine Lehre von den krummen Flächen Fortschritte gemacht habe, und sagt: »Man muss den Baum zu allen seinen Wurzelfäden verfolgen, und manches davon kostet mir wochenlanges angestrengtes Nachdenken. Vieles davon gehört sogar in die Geometria situs, ein fast noch ganz unbearbeitetes Feld« (W. VIII, S. 400).

In einer Aufzeichnung im *Handbuch* 19 Be, die vom 22. Januar 1833 datiert ist, heisst es: »Von der Geometria Situs, die LEIBNIZ ahnte, und in die nur einem paar Geometern (EULER und VANDERMONDE) einen schwachen Blick zu tun vergönnt war, wissen und haben wir nach anderthalbhundert Jahren noch nicht viel mehr wie nichts. Eine Hauptaufgabe aus dem Grenz-

---

1) L. EULER, *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*, Comment. acad. sc. Petrop. 8 (1736), 1741, S. 128 (vorgelegt den 26. August 1735); vgl. den Artikel *Situation* von D'ALEMBERT, *Encyclopédie méthodique*, Abteilung Math., Bd. III, Paris 1789, S. 53.

2) L. EULER, *Elementa doctrinae solidorum*, Novi Comment. acad. sc. Petrop. 4 (1752/3), 1758, S. 109 (gelesen Berlin, den 26. Nov. 1750); *Demonstratio nonnullarum proprietatum, quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita*, ebenda, S. 140 (vorgelegt den 6. April 1752); vgl. A. L. F. MEISTER, *Commentatio de solidis geometricis*, Comment. Soc. sc. Gotting. Vol. 7 (1784/85) 1786, Comm. Math. S. 1.

3) L. EULER, *Solution d'une question curieuse qui ne paroit soumise à aucune analyse*, Hist. de l'Acad., année 1759, Berlin 1766, Mémoires, S. 310.

4) CH. A. VANDERMONDE, *Remarques sur les problèmes de situation*, Hist. de l'Acad. année 1771, Paris 1774, S. 566. V. sagt: »LEIBNIZ promit un calcul de situation et mourut sans rien publier. C'est un sujet où tout reste à faire et qui mériterait bien qu'on s'en occupât«. — Zu nennen wären ferner noch die Abhandlungen: N. FERGOLA, *Nuovo metodo da risolvere alcuni problemi di sito e posizione*, Atti dell' Acad., Napoli 1787, S. 119; *Nuove ricerche sulle risoluzioni dei problemi di sito*, ebenda, S. 157 und A. N. GIORDANO, *Nuovo metodo da risolvere alcuni problemi di sito e posizione*, ebenda, S. 139.

gebiet der Geometria Situs und der Geometria Magnitudinis wird die sein, die Umschlingungen zweier geschlossener oder unendlicher Linien zu zählen« (W. V., S. 605).

Bei den vorstehenden Worten hat GAUSS wohl an den Brief gedacht, den LEIBNIZ am 8. September 1679 an HUYGENS gerichtet hatte und der damals von UYLENBROEK veröffentlicht worden war[1]). LEIBNIZ schreibt dort: »Je crois qu'il nous faut encore une autre Analyse proprement géométrique ou linéaire qui nous exprime directement situm, comme l'Algèbre exprime magnitudinem«.

Die Göttinger Gelehrten Anzeigen vom Jahre 1834 enthalten eine ausführliche Besprechung der UYLENBROEKschen Veröffentlichung von M. STERN (seit 1829 Privatdozent der Mathematik in Göttingen), den der Essay von LEIBNIZ um so mehr interessiert hatte, »als er sich erinnert, von dem grössten Mathematiker unserer Zeit einige Ideen über Geometrie gehört zu haben, die mit einigen hier vorkommenden durchaus übereinstimmen« (S. 1940). Hierzu ist jedoch zu bemerken, dass LEIBNIZ weniger an die Geometria situs im Sinne von GAUSS »als an einen geometrischen Algorithmus denkt, der für einzelne geometrische Probleme eher eine genuine Lösungsmethode liefert, als die Methode der gewöhnlichen analytischen Geometrie«[2]).

Bei der Geometria situs besitzen wir in den wenigen uns erhaltenen Aufzeichnungen und überlieferten gelegentlichen Äusserungen nur die Spuren ausgedehnter Untersuchungen, die GAUSS angestellt hatte. Dies geht auch daraus hervor, dass er wiederholt geplant hat, darüber etwas durch den Druck bekannt zu machen. So schreibt MÖBIUS am 2. Februar 1847 an GAUSS: »Wie ich von W. WEBER gehört habe, haben Sie schon vor einigen Jahren beabsichtigt, als Einleitung oder Vorbereitung der Theorie der elektrischen oder

---

1) J. UYLENBROEK, *Chr. Hugenii aliorumque seculi XVII. virorum celebrium exercitationes mathematicae et philosophicae*, Haag 1833, Heft 1, S. 9; im Heft 2, S. 6 ist der dem Briefe beigelegte Versuch einer geometrischen Charakteristik abgedruckt. Beides findet man wieder in LEIBNIZens *Mathematischen Schriften*, herausgegeben von C. J. GERHARDT, 1. Abt., Bd. 2, Berlin 1850, S. 19, 20, ferner in GRASSMANNS *Gesammelten mathematischen und physikalischen Werken*, Bd. I, Teil 1, Leipzig 1894, S. 417, in den *Oeuvres complètes* von CHR. HUYGENS, Bd. 8, Haag 1899, S. 216, 219 und endlich bei C. J. GERHARDT, *Der Briefwechsel von Leibniz mit Mathematikern*, Bd. I, Berlin 1899, S. 568, 570.

2) M. DEHN und P. HEEGAARD, *Analysis situs*, Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. III, Teil 1, S. 154.

magnetischen Strömungen eine Abhandlung über alle möglichen Umschlingungen eines Fadens zu schreiben. Steht es nicht zu hoffen, dass diese Abhandlung bald erscheinen wird? Die Erfüllung dieser Hoffnung würde mir und gewiss auch vielen Andern sehr erwünscht sein« (Brief im GAUSS-Archiv). GAUSS scheint dem Gedanken einer solchen Veröffentlichung näher getreten zu sein, hat jedoch schliesslich davon Abstand genommen. Dies ergibt sich aus einem Briefe an MÖBIUS vom 13. August 1849, in dem er diesem zunächst für die Übersendung einer Abhandlung über die Gestalten der Kurven dritter Ordnung dankt und ihn auffordert, in entsprechender Weise die gestaltlichen Verhältnisse der algebraischen Kurven zu untersuchen, die in GAUSSENS Dissertation (1799) auftreten, und dann fortfährt: »Anderes damit Verwandtes hat mich vielfach beschäftigt, und ich wollte erst in meiner neulich [16. Juli 1849] in der Sozietät gehaltenen Vorlesung [*Beiträge zur Theorie der algebraischen Gleichungen*] die Darstellung der Hauptmomente jener Untersuchung als dritten Teil bestimmen; aber ich würde zur Ausarbeitung dieser Darstellung einer viel grösseren Musse bedurft haben, als sie mir zu Gebote gestanden hat« (W. X 1, S. 109). Eine Andeutung dieser Absicht ist wohl die Stelle in Art. 3 der *Beiträge*, wo GAUSS bemerkt, die von ihm vorzutragende Beweisführung für den Fnndamentalsatz der Algebra »gehöre im Grunde einem höhern, von Räumlichem unabhängigen Gebiete der allgemeinen abstrakten Grössenlehre an, deren Gegenstand die nach der Stetigkeit zusammenhängenden Grössenkombinationen sind, einem Gebiete, welches zur Zeit noch wenig angebauet ist, und in welchem man sich auch nicht bewegen kann ohne eine von räumlichen Bildern entlehnte Sprache« (W. III, S. 79). Vielleicht enthält das Bruchstück einer Abhandlung über die Konvergenz der Reihen (W. X 1, S. 407—410) einen Teil jener Untersuchungen (vgl. S. 55).

Im Folgenden wird zunächst berichtet werden, was sich unmittelbar auf Grund der nachgelassenen Aufzeichnungen und mittelbar an der Hand von Veröffentlichungen über andere Gegenstände über die Geometria situs bei GAUSS sagen lässt. Alsdann soll versucht werden, dem Einfluss nachzugehen, den mündliche Andeutungen von GAUSS auf die Entwicklung dieses Zweiges der Grössenlehre gehabt haben.

12.

Verknotungen und Verkettungen von Kurven.

Eine der ältesten Aufzeichnungen von GAUSS, die uns überhaupt im Nachlass erhalten sind, ist ein Blatt mit der Jahreszahl 1794. Es trägt die Überschrift: A collection of knots und enthält 13 sauber gezeichnete Ansichten von Knoten mit daneben geschriebenen englischen Namen; man darf wohl annehmen, dass es sich um einen Auszug aus einem englischen Buche über Knoten handelt. Dabei liegen zwei weitere Zettel mit Zeichnungen von Knoten: der eine ist datiert 1819, der andere stammt wohl aus noch späterer Zeit, denn GAUSS hat darauf vermerkt: »RIEDL, *Beiträge zur Theorie des Sehnenwinkels*. Wien 1827«.

Auf die Verknotungen geschlossener Kurven beziehen sich die Bemerkungen, die aus dem Nachlass W. VIII. S. 271—285 abgedruckt sind. Im Besonderen hat GAUSS in einer aus dem Dezember 1844 stammenden Notiz die zahlreichen Formen ermittelt, die geschlossene Kurven mit vier Knoten aufweisen können.

Die Verkettung von zwei Kurven im Raume betrifft die schon erwähnte Bemerkung vom 22. Januar 1833 (W. V. S. 605), in der am Schluss die bekannte Integralformel für die Anzahl der Umschlingungen mitgeteilt wird. »Es war damit der erste Anfang gemacht worden zu der später vor allem durch die von W. DYCK benutzte KRONECKERsche Charakteristikentheorie erfolgreichen Anwendung der höheren Analysis auf die Geometria situs«[1]).

Die Bestimmung der gegenseitigen Lage von Kurven in der Ebene ist das Mittel, dessen sich GAUSS in seiner Dissertation (1799) bei der Herleitung des Fundamentalsatzes der Algebra bedient hatte[2]). Noch stärker tritt dieser Gesichtspunkt bei der neuen Darstellung vom Jahre 1849 hervor: »Ich werde die Beweisführung in einer der Geometrie der Lage entnommenen Einkleidung darstellen, weil jene dadurch die grösste Anschaulichkeit und Einfachheit ge-

---

1) M. DEHN und P. HEEGAARD, a. a. O., S. 155. Man findet hier auch ausführliche Angaben über die anschliessenden Arbeiten. Hinzuzufügen ist, dass FR. ZÖLLNER, *Naturwissenschaft und christliche Offenbarung*, Leipzig 1881, S. 100 berichtet, ein gewisser SCHÜRLEIN, ein Schüler von GAUSS, habe sich sehr eingehend und unter stetiger Teilnahme von GAUSS mit diesem Gegenstande beschäftigt; leider ist es nicht möglich gewesen, Näheres hierüber zu ermitteln.

2) In der Fussnote zum art. 21 der Dissertation sagt GAUSS ausdrücklich, Beweise, die sich auf die Geometria situs stützten, seien nicht weniger schlüssig als solche, bei denen man sich der Prinzipien der Geometria magnitudinis bediene.

winnt« (W. III. S. 79). Es folgt die vorher (S. 49) angeführte Bemerkung über die nach der Stetigkeit zusammenhängenden Grössenkombinationen. Hierin liegt jedoch keine Einschränkung, weil »zwar die räumliche Anschauung der beste Führer in der Entdeckung neuer Sätze [der Geometria situs] und ihrer Beweise ist, man aber in jedem einzelnen dieser Fälle sehen kann, dass die in Betracht kommenden Schlüsse auch allein mit Hilfe abstrakter Entwicklungen gemacht werden können«[1].

Endlich sind noch die Untersuchungen zu nennen, die GAUSS über die möglichen Verteilungsarten der geozentrischen Örter eines Planeten auf dem Zodiakus angestellt hat (W. VI. S. 106), und die hierbei erwähnten Fälle eines kettenartigen Ineinandergreifens zweier Planetenbahnen, wie es bei den Asteroiden mehrfach verwirklicht ist.

13.

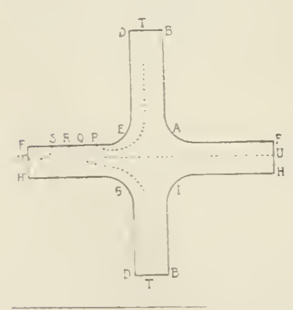
MÖBIUS, LISTING, RIEMANN.

Mit der Frage, welchen Einfluss GAUSS auf die weitere Entwicklung der Geometria situs gehabt hat, kommen wir auf ein schwieriges Gebiet, denn ein solcher Einfluss war im Wesentlichen nur möglich durch mündliche Äusserungen, von denen manche, wie es scheint, gar erst durch Mittelsleute an die Stelle gekommen sind, wo sie gewirkt haben; es waren Funken, die nur da zündeten, wo schlummernde Energien zu wecken waren, und es heisst daher nicht, hervorragende Männer wie MÖBIUS, LISTING, RIEMANN verkleinern, wenn man glaubt, GAUSS einen gewissen Einfluss auf ihre Entdeckungen zuschreiben zu müssen.

MÖBIUS (1790—1868) ist nach Abschluss seiner Leipziger Studien im Herbst 1813 als Dreiundzwanzigjähriger nach Göttingen gekommen und hat dort etwa ein Semester lang unter Leitung von GAUSS auf der Sternwarte gearbeitet (Brief von GAUSS an OLBERS vom 23. April 1814, Br. G.-O. 1. S. 543). Es war die Zeit, wo man in der Astronomie von einer GAUSSschen Schule sprechen konnte, aus der ENCKE, GERLING, NICOLAI, SCHUMACHER, SEEBER, STRUVE, WACHTER hervorgegangen sind. Dass der junge Sachse damals in nähere Beziehungen zu GAUSS gekommen ist, zeigt der freundschaftliche Ton der Briefe,

[1]) M. DEHN und P. HEEGAARD, a. a. O., S. 170.

die lange Jahre hindurch zwischen ihnen gewechselt worden sind. Es bestand zwischen Gauss und Möbius, als dieser in Göttingen weilte, jenes Verhältnis, das Gauss am förderlichsten schien. »Meiner Einsicht nach ist [ein förmlicher Unterricht] bei solchen Köpfen, die nicht etwa nur eine Masse von Kenntnissen einsammeln wollen, sondern denen es hauptsächlich daran liegt, ihre eigenen Kräfte zu üben, sehr unzweckmässig; einen solchen muss man nicht bei der Hand fassen und zum Ziele führen, sondern nur von Zeit zu Zeit ihm Winke geben, um sich selbst auf dem kürzesten Wege hinzufinden« (Brief an Schumacher vom 2. Oktober 1808, Br. G.-Sch. I. S. 6). Wie weit die zahlreichen Berührungspunkte zwischen den Untersuchungen von Möbius und den Gedanken von Gauss auf Gespräche oder auch, wie Listing einmal sagt, auf »hingeworfene Äusserungen« zurückzuführen sind, vielleicht zum Teil in unbewusster Nachwirkung, entzieht sich unserer Kenntnis. In einem Falle freilich hat sich Möbius ausdrücklich auf eine mündliche Mitteilung von Gauss bezogen, nämlich in Aufzeichnungen aus den Jahren 1858 und 1859 über die Topologie der krummen Flächen und im Besonderen der Polyeder, Aufzeichnungen, die erst 1886 durch Reinhardt aus dem Nachlass herausgegeben worden sind[1]. In dem Abschnitt über Flächen und Polyeder höherer Klasse (mehrfachen Zusammenhanges) werden auch die Eigenschaften eines Doppelringes betrachtet, und es heisst: »Man kann sich einen solchen Doppelring leicht zur Anschauung bringen, wenn man ein Blatt Papier in Form eines Kreuzes ausschneidet und hierauf die Enden FH und $F'H'$ (siehe die Figur) des einen Paares einander gegenüberliegender Arme etwa oberhalb der anfänglichen Ebene des Kreuzes und die Enden BD und $B'D'$ des anderen Paares unterhalb dieser Ebene mit einander vereinigt. Es besitzt diese nur von einer Linie $A\overline{BB'}I\overline{HH'}G\overline{D'D}E\overline{F'F}A$ begrenzte Fläche noch die merkwürdige Eigenschaft (nach einer mündlichen Mitteilung von Gauss:



[1] A. F. Möbius, Gesammelte Werke II. Leipzig 1886, S. 518—559. Einen Teil der darin enthaltenen Ergebnisse hat Möbius veröffentlicht: *Theorie der elementaren Verwandtschaft*, Leipziger Berichte 1863, S. 18, Werke II, S. 433. *Über die Bestimmung des Inhalts eines Polyeders*, ebenda 1865, S. 31, Werke II, S. 473.

wodurch G. zur Betrachtung der Fläche geführt worden ist, ist mir unbekannt), dass man von irgend vier auf ihrem Perimeter auf einander folgenden Punkten P, Q, R, S den ersten mit dem dritten und den zweiten mit dem vierten durch zwei Linien $PTT'R$ und $QUU'S$ verbinden kann, welche in der Fläche selbst liegen und dennoch einander nicht schneiden, — wie dies doch immer geschehen würde, wenn die Fläche eine Grundform der ersten Klasse [einfach zusammenhängend] wäre« (S. 541).

Als die Fürstlich JABLONOWSKIsche Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig im Jahre 1844 die Preisaufgabe gestellt und, nachdem keine Lösung eingelaufen war, 1845 wiederholt hatte: »Es soll nach den vorhandenen Bruchstücken die von LEIBNIZ geplante geometrische Charakteristik wiederhergestellt und weiter ausgebildet werden«, hat MÖBIUS GRASSMANN darauf hingewiesen, und dessen Abhandlung: *Geometrische Analyse* hat am 1. Juli 1846 auf den eingehend begründeten Antrag von DROBISCH und MÖBIUS den Preis erhalten[1]. MÖBIUS hat am 2. Februar 1847 einen Abdruck der Preisarbeit an GAUSS gesandt[2], sicherlich in der Annahme, dass dieser an dem Gegenstande Anteil nehme.

Weiteres über Beziehungen zwischen Gedanken von GAUSS und von MÖBIUS findet man im vierten Abschnitt dieses Aufsatzes.

LISTING (1806—1882) hatte in Göttingen Mathematik und Naturwissenschaften studiert und war dort 1834 unter dem Dekanat von GAUSS mit einer Abhandlung über die Flächen zweiter Ordnung promoviert worden. Noch in demselben Jahre schloss er sich SARTORIUS v. WALTERSHAUSEN auf einer Reise nach Sizilien an und wurde sein Gehilfe bei den geologischen Untersuchungen am Aetna. Nach Deutschland zurückgekehrt ist er seit 1837 als Lehrer der Maschinenkunde am Polytechnikum zu Hannover und seit 1839 als Professor der Physik an der Universität Göttingen tätig gewesen.

Der Nachlass LISTINGS[3] zeigt, dass er sich schon früh mit dem »Knotenwesen« und seinen Beziehungen zur Praxis der Seeleute und der Pioniere

1) Vgl. *Grassmanns Leben* von F. ENGEL, GRASSMANNS Werke III, Teil 2. Leipzig 1911, S. 108—118. Die Abhandlung ist abgedruckt in den Werken Bd. I, Teil 1, S. 321—399.

2) GRASSMANNS Werke III, Teil 2, S. 117.

3) Die betreffenden Aufzeichnungen besitzt teils die Universitätsbibliothek in Göttingen, teils der Verfasser dieses Aufsatzes.

befasst hat. In einem Briefe an einen gewissen MÜLLER in Göttingen, datiert Catania, den 1. April 1836, schreibt er: »Die erste Idee, mich in der Sache [der Geometria situs] zu versuchen, ist mir durch allerlei Vorkommnisse bei den praktischen Arbeiten auf der Sternwarte in Göttingen und durch hingeworfene Äusserungen von GAUSS beigekommen«. Dass GAUSS in den Vorlesungen über praktische Astronomie die Geometria situs berührt hat, bezeugt die *Theorie des Vortrags von Lehren, die Raumverhältnisse betreffen*, W. VIII, S. 196—199.

In demselben Sinne schreibt LISTING in einer 1856 verfassten kurzen Lebensbeschreibung: »Einen andern Gegenstand meiner Beschäftigung bildet seit langer Zeit die Untersuchung der modalen (nichtquantitativen) Raumverhältnisse, zu der schon LEIBNIZ die Idee gefasst hatte. Ich habe zu dieser fast noch ganz unausgebauten quasi-mathematischen Disziplin, zum Teil durch GAUSS aufgemuntert, in den *Vorstudien zur Topologie*, Göttingen 1847, einen ersten Versuch veröffentlicht, dem ich künftig noch andere hoffe folgen lassen zu können«.

Nach seinen Aufzeichnungen hat LISTING schon während des Aufenthalts in Italien, seit 1835, begonnen, sich mit der Topologie zu beschäftigen; so wollte er die Lehre von den »qualitativen Gesetzen der örtlichen Verhältnisse« genannt wissen, weil der Name Geometrie der Lage schon in anderer Bedeutung verwendet werde. Der lange Brief an MÜLLER vom 1. April 1836 beweist, dass er bereits damals im Wesentlichen zu den Ergebnissen gelangt war, die er 1847 in der Zeitschrift »Göttinger Studien« als Abhandlung und dann 1848 als besondere Schrift veröffentlicht hat. Dass er im Jahre 1845 seine Beschäftigung mit der Topologie wieder aufnahm und nunmehr zu einem ersten Abschluss kam, ist wohl auf eine Anregung von GAUSS zurückzuführen, denn in den tagebuchartigen Notizen, den »Diarien«, die LISTING geführt hat, ist unter dem 2. Januar 1845 verzeichnet; »Bei GAUSS, Geometria situs«.

Mit dem Jahre 1858 beginnt eine neue Reihe topologischer Untersuchungen, die zu der grossen, 1862 erschienenen Abhandlung über den *Census räumlicher Complexe* geführt haben. Das Ziel LISTINGS war, dem EULERschen Satze über die Beziehung zwischen den Anzahlen der Ecken, Kanten und Flächen eines Vielflachs, der nur unter einschränkenden Voraussetzungen richtig ist, eine allgemein gültige Form zu geben. Merkwürdigerweise hat in demselben

Jahre 1858 auch Möbius begonnen, sich mit der Geometria situs der Polyeder zu beschäftigen[1], und beide, Listing und Möbius, sind fast gleichzeitig und unabhängig von einander zur Entdeckung der einseitigen Flächen gelangt[2].

Den Schlüssel zur Verallgemeinerung des Eulerschen Satzes bildet der Begriff des Zusammenhangs oder, wie Listing mit einem nicht üblich gewordenen Worte sagt, der Cyklose, die einem irgendwie berandeten Flächenstücke zukommt. Dass Gauss den Begriff des Zusammenhanges und seine Bedeutung für die Lehre von den Funktionen einer komplexen Veränderlichen erkannt hat, zeigt das aus dem Nachlass herausgegebene Bruchstück über die Konvergenz der Entwicklungen periodischer Funktionen (W. X 1, S. 410—412), das um das Jahr 1850 entstanden ist. Auch die bereits erwähnte mündliche Mitteilung an Möbius über den Doppelring und die darauf liegenden Kurven gehört hierher. Ob Listing durch Äusserungen von Gauss auch zur Fortsetzung seiner Untersuchungen über die Topologie angeregt worden ist, muss dahingestellt bleiben. Ebenso ist das Verhältnis, in dem die Arbeiten von Riemann über die Analysis situs[3] zu den topologischen Untersuchungen von Listing stehen, noch ungeklärt.

Während bei Möbius und Listing eigene Zeugnisse vorliegen, dass sie durch Gauss zur Beschäftigung mit der Geometria situs angeregt worden seien, obwohl nicht festgestellt werden kann, in welchem Umfange das geschehen sein mag, sind wir bei Riemann (1826—1866) lediglich auf Vermutungen angewiesen. Ein unmittelbarer Verkehr mit Gauss kommt kaum in Betracht, wohl aber darf man an eine Vermittlung Gaussscher Gedanken durch A. Ritter (1826—1908) und W. Weber (1804—1891) denken. Ritter hat während seiner Göttinger Studienzeit, 1850 bis 1853, in engen Beziehungen zu Riemann gestanden, die sich später fortsetzten; es ist anzunehmen, dass Riemann durch ihn Kenntnis erhalten hat zum Beispiel von den Ausführungen, die Gauss in der Vorlesung über die Methode der kleinsten Quadrate im Wintersemester 1850/51 über n-dimensionale Mannigfaltigkeiten gemacht hat (W. X 1,

1) Vgl. die Bemerkung Reinhardts, Möbius Werke II, S. 519.

2) Vgl. P. Stäckel, *Die Entdeckung der einseitigen Flächen*, Math. Annalen, Bd. 52, 1899, S. 598.

3) B. Riemann, *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse*, Dissertation, Göttingen 1851, art. 6; Werke, 1. Aufl., S. 9—12; *Theorie der Abelschen Functionen*, zweiter Abschnitt, Crelles Journal, Bd. 54, 1857, Werke, 1. Aufl., S. 84—89.

S. 473—482). Mit WEBER aber stand RIEMANN seit 1850 als Teilnehmer, seit 1853 als Assistent an dessen mathematisch-physikalischem Seminar in engem Verkehr[1], und wir haben aus dem Briefe von MÖBIUS an GAUSS vom 2. Februar 1847 erfahren, dass dieser mit WEBER über die Umschlingungen zweier Kurven im Raume gesprochen hatte. Wie dem aber auch sei, so gibt es kein Anzeichen, dass GAUSS den Begriff der mehrblättrigen Fläche, die zur Darstellung des Verlaufs einer mehrdeutigen Funktion einer komplexen Veränderlichen dient, gekannt habe, und hier liegt also sicher eine durchaus ursprüngliche Schöpfung RIEMANNS vor.

Abschnitt III.

Die komplexen Grössen in ihrer Beziehung zur Geometrie.

14.

Kreisteilung.

Die »Darstellung der imaginären Grössen in den Relationen der Punkte in plano« (Brief an DROBISCH vom 14. August 1834, W. X 1, S. 106) hat nicht nur für die arithmetischen und funktionentheoretischen, sondern auch für die geometrischen Untersuchungen von GAUSS eine so grosse Bedeutung, dass den Beziehungen der komplexen Grössen zur Raumlehre ein besonderer Abschnitt dieses Aufsatzes gewidmet werden soll; in ihm sollen die Ausführungen, die in den Aufsätzen über GAUSS' Arbeiten zur Zahlentheorie, Funktionentheorie und Algebra enthalten sind, wieder aufgenommen und ergänzt werden.

Schon sehr früh hat GAUSS versucht, um einen von ihm gern gebrauchten Ausdruck anzuwenden, in die Metaphysik der imaginären Grössen einzudringen. In der Selbstanzeige der zweiten Abhandlung *über die biquadratischen Reste* vom Jahre 1831 sagt er, dass er »diesen hochwichtigen Teil der Mathematik seit vielen Jahren betrachtet habe« (W. II, S. 175), und in dem Briefe an DROBISCH vom 14. August 1834 freut er sich, dass dieser »auf seine schon fast

1) Vgl. die Bemerkungen DEDEKINDS in RIEMANNS Lebenslauf, Werke, 1. Aufl., S. 512—515.

seit 40 Jahren gehegten Grundansichten über die imaginären Grössen eingegangen sei« (W. X1, S. 106). Als solche Grundansichten wird man wohl erstens die Erkenntnis zu bezeichnen haben, dass »den komplexen Grössen das völlig gleiche Bürgerrecht mit den reellen Grössen eingeräumt werden müsse« (W. II, S. 171), und zweitens, dass diese Grössen »ebenso gut wie die negativen ihre reale gegenständliche Bedeutung haben« (W. X1, S. 405), die sich in ihrer »Versinnlichung durch die Punkte einer unbegrenzten Ebene« (W. X1, S. 407) kund gibt.

Wird man durch die vorstehenden Angaben von Gauss etwa auf die Jahre 1795 und 1796 zurückgeführt, so kann als Bestätigung eine Stelle der *Disquisitiones arithmeticae* dienen, und zwar aus dem dritten Abschnitt, der nach Bachmann (W. X2, Abh. 1, S. 6) im Wesentlichen bereits 1796 entstanden und 1797 niedergeschrieben worden ist (der Druck der *Disquisitiones* begann im April 1798 und hat mit verschiedenen Unterbrechungen bis 1801 gedauert). Dort sagt Gauss, er wolle auf die Lehre von den imaginären Indizes, zu denen man bei Moduln ohne primitive Wurzeln seine Zuflucht nehmen muss, bei einer anderen Gelegenheit eingehen, »wenn wir es vielleicht unternehmen werden, die Lehre von den imaginären Grössen, die wenigstens nach unserem Urteil bis jetzt von Niemandem auf klare Begriffe zurückgeführt ist, ausführlicher zu behandeln« (W. I, S. 71).

Im *Tagebuch*, das mit dem März 1796 beginnt, findet sich keine Aufzeichnung, die man mit einer solchen Absicht in Verbindung bringen könnte. Wohl aber zeigt gerade die erste Eintragung, dass Gauss in der vorhergehenden Zeit mit imaginären Grössen zu tun gehabt hatte, denn er verkündet hier, dass er die geometrische Siebzehnteilung des Kreisumfanges entdeckt habe, das heisst, wie wir aus dem Briefe an Gerling vom 6. Januar 1819 (W. X1, S. 125) wissen, die Auflösung der zugehörigen Kreisteilungsgleichung mittels wiederholter Ausziehung von Quadratwurzeln, und zwar hatte Gauss, nach den Angaben in demselben Briefe, schon während seines ersten Semesters in Göttingen, das Oktober 1795 begann, die Kreisteilungsgleichungen für einen beliebigen Primzahlgrad untersucht.

Dass die Teilung des Kreisumfanges in n gleiche Stücke mittels imaginärer Grössen auf die Lösung der Gleichung $x^n - 1 = 0$ zurückgeführt werden

kann, ist eine Einsicht, die man COTES[1] und MOIVRE[2] verdankt, die aber erst durch EULER geklärt und sichergestellt worden ist[3]. Später hat sich VANDERMONDE mit der Auflösung solcher Gleichungen mittels Wurzelziehens befasst. Es ist sehr wahrscheinlich, dass GAUSS bei der Abfassung der *Disquisitiones arithmeticae* dessen Abhandlung gekannt hat, denn in dem Briefe an OLBERS vom 12. Oktober 1802 sagt er, dass wir über die Geometria situs »nur einige Fragmente von EULER und einem von mir sehr hochgeschätzten Geometer VANDERMONDE haben« (Br. G.-O., 1, S. 103). Die Abhandlung über Geometria situs steht aber in demselben Bande der Pariser Denkschriften für das Jahr 1771 wie die Abhandlung über die Auflösung der algebraischen Gleichungen[4].

Nachdem GAUSS im Art. 337 der *Disquisitiones arithmeticae* (W. I, S. 414) bemerkt hat, die trigonometrischen Funktionen der Bögen

$$2k\pi/n \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots n-1)$$

seien die Wurzeln von Gleichungen n-ten Grades, fährt er fort: »Jedoch ist keine dieser Gleichungen so leicht zu behandeln und für unseren Zweck so geeignet, wie diese: $x^n - 1 = 0$, deren Wurzeln bekanntlich mit den Wurzeln jener aufs engste verbunden sind. Wenn man nämlich der Kürze halber i für die imaginäre Grösse $\sqrt{-1}$ schreibt, so werden die Wurzeln der Gleichung $x^n - 1 = 0$ durch

$$\cos 2k\pi/n + i \sin 2k\pi/n$$

dargestellt, wo für k alle Zahlen $0, 1, 2, \ldots, n-1$ zu nehmen sind«.

1) R. COTES, *Harmonia mensurarum, sive analysis et synthesis per rationum et angulorum mensuras promota*, Cambridge 1722.

2) A. DE MOIVRE, *Miscellanea analytica*, London 1730.

3) L. EULER, *Introductio in analysin*, Lausanne und Genf 1748, siehe besonders t. I, cap. 8: *De quantitatibus transcendentibus ex circulo ortis*.

4) CH. A. VANDERMONDE, *Remarques sur les problèmes de situation*, Histoire de l'Acad., année 1771, Paris 1774, Mémoires, S. 566; *Sur la résolution des équations*; ebenda, S. 365; die letztere Abhandlung ist in deutscher Sprache herausgegeben von C. ITZIGSOHN, VANDERMONDE, *Abhandlungen aus der reinen Mathematik*, Berlin 1887. Auf S. 375 behauptet VANDERMONDE, die Gleichung $x^n - 1 = 0$ sei für jeden Grad n durch Wurzelziehen lösbar und führt die Rechnungen für einige Fälle durch, im Besonderen für $n = 11$. Für die Exponenten $n \leq 10$ hatte schon EULER, *De extractione radicum ex quantitatibus irrationalibus*, Comment. acad. sc. Petrop. 13 (1741/3) 1751, § 39 bis 48, Opera omnia, ser. I, vol. 6, S. 31, die Wurzeln mittels blosser Wurzelziehungen dargestellt; dagegen, meint er, führe der Fall $n = 11$ auf eine Gleichung fünften Grades, deren Lösung noch verborgen sei.

Auf diese Art werden den Eckpunkten des regelmässigen n-Ecks, das dem Kreise vom Halbmesser Eins eingeschrieben ist, die soeben angegebenen komplexen Grössen zugeordnet. Die dabei auftretenden Grössen $\cos 2k\pi/n$ und $\sin 2k\pi/n$ sind die rechtwinkligen kartesischen Koordinaten der betreffenden Eckpunkte, wenn der Mittelpunkt des Kreises zum Anfangspunkt gewählt und die Abszissenachse durch den Eckpunkt gelegt wird, für den $k = 0$ ist. Mithin gelangt man in diesem Falle ganz unmittelbar zu der Gaussschen Versinnlichung der komplexen Grössen durch die Punkte einer Ebene.

Dass die Betrachtung der Eckpunkte des n-Ecks Gauss geläufig war, zeigt auch die Ausdrucksweise, ganze Zahlen seien »kongruent modulo n«, wenn sie sich um Vielfache einer ganzen Zahl n unterscheiden: beim Durchlaufen des Kreisumfangs entsprechen nämlich den Werten von k, die mod. n kongruent sind, dieselben Eckpunkte des n-Ecks, und so hat die Bezeichnung »kongruent« ihre gute geometrische Bedeutung.

Ob die geometrische Versinnlichung der komplexen Grössen den Untersuchungen über die Kreisteilung entsprungen ist, lässt sich freilich nicht mit Sicherheit entscheiden. Man könnte dagegen einwenden, dass auch bei Euler Grössen der Form $\cos\varphi + i\sin\varphi$ an mehr als einer Stelle in einer Weise auftreten, die ihre geometrische Bedeutung nahe zu legen scheint, ohne dass es dazu gekommen ist, und die Hauptsache liegt in dem Entschluss, die imaginären Grössen als den reellen gleichberechtigt anzuerkennen. Vielleicht hat Gauss diese Anerkennung durch die bereits erwähnte Einführung des Zeichens i im art. 337 der *Disq. arith.* andeuten wollen[1]. Dass er sich in den Disquisitiones wie in der Dissertation (1799) mit Andeutungen begnügte, ist wohl teils aus seiner Scheu, strittige Dinge zu berühren, teils aus dem Umstande zu erklären, dass er selbst, wenn auch seine »Grundansicht« feststand, die neue Lehre noch nicht für reif hielt. In der Tat ist er erst nach einer langen und harten Arbeit zu einer ihn befriedigenden Auffassung der imaginären

1) Das Zeichen i für $\sqrt{-1}$ findet sich gelegentlich schon bei Euler, nämlich in der am 5. Mai 1777 der Petersburger Akademie vorgelegten Abhandlung: *De formulis differentialibus angularibus maxime irrationalibus, quas tamen per logarithmos et arcus circulares integrare licet,* die 1794 aus dem Nachlass im vierten Bande der *Institutiones calculi integralis* abgedruckt ist, ed. tertia, Petersburg 1845, S. 184. Gauss hat das Zeichen i seit dem Jahre 1801 beständig angewandt und seinem Beispiel sind die Mathematiker gefolgt.

Grössen gelangt. So schreibt er am 11. Dezember 1825 an Hansen, seine Untersuchungen über die allgemeine Lehre von den krummen Flächen griffen tief ein in die Metaphysik der Raumlehre, »und nur mit Mühe kann ich mich von solchen daraus entspringenden Folgen, wie z. B. die wahre Metaphysik der imaginären Grössen ist, losreissen. Der wahre Sinn des $\sqrt{-1}$ steht mir dabei mit grosser Lebendigkeit vor der Seele, aber es wird schwer sein, ihn in Worte zu fassen, die immer nur ein vages, in der Luft schwebendes Bild geben können« (Brief im Gauss-Archiv). In einer wahrscheinlich im Anschluss an diesen Brief niedergeschriebenen Aufzeichnung *Fragen zur Metaphysik der Mathematik* (W. X 1, S. 396) hat er versucht, seine Gedanken auszugestalten, und man erkennt hier die Anfänge der Darstellung, die er in der Selbstanzeige vom Jahre 1831 gegeben hat.

15.

Elliptische, im besonderen lemniskatische Funktionen.

Ein zweiter Anlass, sich mit den imaginären Grössen zu beschäftigen, eröffnete sich für Gauss in der doppelten Periodizität der lemniskatischen Funktionen. Im Januar 1797 hat er diese Funktionen zu betrachten begonnen (T. Nr. 51) und ist spätestens im März zur Entdeckung der zweiten, imaginären Periode gelangt. Somit ergab sich »die Notwendigkeit, das Gebiet einer veränderlichen Grösse dadurch zu erweitern, dass dieser Grösse auch komplexe Werte beigelegt werden« (Schlesinger, S. 12). Die darin liegenden Schwierigkeiten kamen sogleich zum Vorschein, als Gauss, die lemniskatischen Funktionen mit dem arithmetisch-geometrischen Mittel verknüpfend, Ende 1797 zu dem allgemeinen elliptischen Integral erster Gattung überging. Die Realitätsverhältnisse der Perioden sind ihm erst allmählich klar geworden. Bezeichnend hierfür ist eine Aufzeichnung, die, wie es scheint, aus dem Anfang des Jahres 1800 stammt: »Der Radikalfehler, woran meine bisherigen Bestrebungen, den Geist der elliptischen Funktion zu verkörpern, gescheitert sind, scheint der zu sein, dass ich dem Integral

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-e^2 \sin\varphi^2)}}$$

die Bedeutung als Ausdruck eines endlichen Teils der Kugelfläche habe unterlegen wollen, während es wahrscheinlich nur einen unendlich schmalen Kugel-

sektor ausdrückt« (W. X 1, S. 546). Offenbar bedeutet, wie SCHLESINGER dazu bemerkt, Kugelfläche den Ort der komplexen Veränderlichen, der endliche Teil, dessen Ausdruck das Integral sein sollte, das Bild des Periodenparallelogramms, während man zu einem unendlich schmalen Kugelsektor gelangen würde, wenn das Verhältnis der Perioden reell ausfiele; vgl. Werke X 1, S. 515.

In das Jahr 1800 fallen auch Untersuchungen über das arithmetisch-geometrische Mittel (T. Nr. 109). GAUSS hat damals die wesentlichen Eigenschaften der elliptischen Modulfunktion aufgefunden; das aber war nur möglich, wenn er den Bereich der Veränderlichen auf das komplexe Gebiet ausdehnte. Man wird daher behaupten dürfen, dass die Auffassungen, die er in dem Briefe an BESSEL vom 18. Dezember 1811 (W. VIII, S. 90, X 1, S. 366) ausgesprochen hat, bis in die Zeit um 1800 zurückreichen. Er verlangt hier, dass man bei der Einführung einer neuen Funktion in die Analysis erkläre, ob man sich auf reelle Werte der Veränderlichen beschränke oder seinem Grundsatze beitrete, »dass man in dem Reiche der Grössen die imaginären $a+ib$ als gleiche Rechte mit den reellen geniessend ansehen müsse«. Es folgen Auseinandersetzungen über den Sinn des Integrals bei Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Dabei, sagt GAUSS, man könne »das ganze Reich aller Grössen, reeller und imaginärer Grössen, sich durch eine unendliche Ebene sinnlich machen, worin jeder Punkt, durch Abszisse $= a$, Ordinate $= b$ bestimmt, die Grösse $a+ib$ gleichsam repräsentiert«. Dies ist die erste uns bekannte Stelle, wo er die geometrische Versinnlichung der komplexen Grössen schriftlich festgelegt hat.

In dem Entwurf einer Abhandlung über die Konvergenz der Reihen, der aus der Zeit um das Jahr 1851 stammt, hat GAUSS seine Ansichten folgendermassen zusammengefasst: »Die vollständige Erkenntnis der Natur einer analytischen Funktion muss auch die Einsicht in ihr Verhalten bei den imaginären Werten des Arguments in sich schliessen, und oft ist sogar letztere unentbehrlich zu einer richtigen Beurteilung der Gebahrung der Funktionen im Gebiete der reellen Argumente. Unerlässlich ist es daher auch, dass die ursprüngliche Festsetzung des Begriffes der Funktion sich mit gleicher Bündigkeit über das ganze Grössengebiet erstrecke, welches die reellen und die imaginären Grössen unter dem gemeinschaftlichen Namen der komplexen Grössen in sich begreift« (W. X 1, S. 405).

In einem zweiten Entwurfe hat GAUSS seine Ansichten genauer darzulegen begonnen (W. X 1, S. 407—416). Wir werden darauf in Nr. 19 eingehen und fahren fort in der Schilderung der Frühzeit.

16.

Existenz der Wurzeln algebraischer Gleichungen.

Das Jahr 1797 brachte nicht nur die Entdeckungen über die lemniskatischen Funktionen, damals ist auch der Beweis für die Existenz der Wurzeln algebraischer Gleichungen entstanden, den GAUSS in der Dissertation 1799 veröffentlicht hat (T. Nr. 80). Allerdings hat er es dort vermieden, imaginäre Grössen zu benutzen. Schon im Titel hat er den zu beweisenden Satz in der Form ausgesprochen, jede algebraische rationale ganze Funktion einer Veränderlichen [mit reellen Koeffizienten] könne in reelle Faktoren ersten oder zweiten Grades zerlegt werden, und im Art. 3 äussert er sich über die imaginären Grössen in sehr vorsichtiger und zurückhaltender Weise. »Sollen die imaginären Grössen überhaupt in der Analysis beibehalten werden, was aus mehreren Gründen, die freilich hinreichend sichergestellt werden müssen, richtiger scheint, als sie zu verwerfen, dann müssen sie notwendig für ebenso möglich gelten wie die reellen .... Doch will ich mir die Rechtfertigung der imaginären Grössen sowie eine eingehende Auseinandersetzung dieses ganzen Gegenstandes für eine andere Gelegenheit vorbehalten« (W. III, S. 6).

Dass GAUSS damals schon im Besitze der geometrischen Versinnlichung war, zeigt der Art. 16 (W. III, S. 22), denn die ganze Betrachtung läuft darauf hinaus, dass die Funktion $f(x+iy)$ in den reellen und den rein imaginären Teil zerlegt wird und die Kurven in der xy-Ebene untersucht werden, in denen je einer der beiden Teile verschwindet. Das sind die Spuren, die, wie GAUSS in der Selbstanzeige vom Jahre 1831 bemerkt hat, der aufmerksame Leser in der Dissertation wiederfinden wird (W. II, S. 175). Hierzu ist freilich zu bemerken, dass diese Andeutungen an und für sich nicht dazu ausreichen würden, um den Schluss zu rechtfertigen, dass GAUSS damals die geometrische Versinnlichung der imaginären Grössen besessen habe, denn auch D'ALEMBERT hat in seinem Beweise für die Wurzelexistenz[1]), den GAUSS im

1) J. D'ALEMBERT, *Recherches sur le calcul intégral,* 1. partie, Histoire de l'Acad. Année 1746, Berlin

Art. 5 wiedergibt und im Art. 6 beurteilt (W. III, S. 7—11), dasselbe Verfahren benutzt, ohne dass ihm doch deshalb die geometrische Versinnlichung der komplexen Grössen zuzuschreiben wäre.

17.
Biquadratische Reste.

Als Gauss im Jahre 1805 von den quadratischen Resten zu den kubischen und biquadratischen fortschritt, fand er sogleich durch Induktion eine Reihe einfacher Lehrsätze, die mit den für die quadratischen Reste gefundenen Ergebnissen überraschende Ähnlichkeit hatten, jedoch ist es ihm erst nach vielen, durch eine Reihe von Jahren fortgesetzten Versuchen gelungen, befriedigende Beweise dafür aufzufinden. Zu diesem Zwecke musste er neue Wege einschlagen, nämlich »das Feld der höhern Arithmetik, welches man sonst nur auf die reellen ganzen Zahlen ausdehnte, auch über die imaginären erstrecken und diesen das völlig gleiche Bürgerrecht mit jenen einräumen« (W. II, S. 171). Wie es scheint ist diese »erlösende Eingebung« in das Jahr 1807 zu setzen (Bachmann, W. X 2, Abh. 1, S. 55). Vollständig durchgedrungen ist Gauss freilich erst 1813 (T. Nr. 144) und veröffentlicht hat er seine Untersuchungen erst 1831 in der Abhandlung über die biquadratischen Reste (W. II, S. 93), die er durch die wiederholt erwähnte Selbstanzeige noch ergänzte (W. II, S. 169). »Wie einfach jetzt auch eine solche Einführung der komplexen Zahlen als Moduln erscheinen mag«, hat Jacobi[1]) geurteilt, »so gehört sie nichtsdestoweniger zu den tiefsten Gedanken der Wissenschaft; ja ich glaube nicht, dass zu einem so verborgenen Gedanken die Arithmetik allein geführt hat, sondern dass er aus dem Studium der elliptischen Transzendenten geschöpft ist, und zwar aus der besonderen Gattung derselben, welche die Rektifikation von Bogen der Lemniscata gibt. In der Theorie der Vervielfachung und Teilung von Bogen der Lemniscata spielen nämlich die komplexen Zahlen von der Form $a+bi$ genau die Rolle gewöhnlicher Zahlen. . . . So wie man einen Kreisbogen, wenn man ihn in 15 Teile teilen soll, in 3 und in 5 Teile teilt und aus beiden

---

1748, Mémoires, S. 182—191; vgl. P. Stäckel, *Integration durch imaginäres Gebiet,* Bibliotheca math. (3) 1 (1900), S. 124.

1) C. G. J. Jacobi, *Über die complexen Primzahlen,* Crelles Journal, Bd. 19, 1839, S. 314, Werke VI, S. 275.

Teilungen die gesuchte findet, so hat man einen Bogen der Lemniscata, um ihn in 17 Teile zu teilen, in $1+4i$ und $1-4i$ Teile zu teilen, und setzt die Teilung in 17 Teile aus beiden zusammen«.

Ebenso wichtig wie diese Erweiterung des Zahlengebietes, mit der die Lehre von den algebraischen Zahlen ins Leben gerufen wurde, ist für die Fortschritte der höheren Arithmetik die Darstellung der ganzen komplexen Zahlen vermöge der Gitterpunkte der Ebene geworden. Hieran schliesst sich bei der Untersuchung der ternären quadratischen Form die Heranziehung der Gitterpunkte im Raume (W. II, S. 188). Es ist sogar wahrscheinlich, dass Gauss bereits Zahlengitter im Raume von n Dimensionen betrachtet hat, denn die Andeutung nach dieser Richtung, die Eisenstein 1844 gemacht hat, geht wohl auf seinen Aufenthalt in Göttingen während des Sommers dieses Jahres zurück[1]. So muss Gauss auch als der Begründer der Geometrie der Zahlen gelten.

Die Bedeutung der beiden Veröffentlichungen vom Jahre 1831 geht jedoch über die Zahlentheorie hinaus. Wenn Gauss in der neuen Darstellung des Beweises für den Fundamentalsatz der Algebra, den er 1849 gab, sagt: »gegenwärtig, wo der Begriff der komplexen Grössen jedermann geläufig ist« (W. III, S. 74), so hat die Analysis ihm diesen Fortschritt zu verdanken. Gewiss hatten schon Wessel (1799), Argand (1806) und andere nach ihnen die selbständige Berechtigung und die geometrische Darstellung der komplexen Grössen erkannt und wichtige Anwendungen davon zu machen gewusst, allein die Kenntnis und Würdigung ihrer Untersuchungen ist auf enge Kreise beschränkt geblieben. Es bedurfte eines Gauss, um die Hemmungen zu beseitigen und die neuen Anschauungen zum Siege zu führen.

18.

Benutzung der komplexen Grössen für geometrische Untersuchungen.

Es ist eine merkwürdige Tatsache, dass Gauss fast überall, wo er mit seinen Forschungen einsetzte, auf die komplexen Grössen stiess. Gilt das, wie wir gesehen haben, für die Algebra, die Funktionentheorie und die Arithmetik, so ist es nicht minder richtig für die Geometrie selbst.

---

[1] Eisenstein, *Geometrischer Beweis des Fundamentaltheorems für die quadratischen Reste*, Crelles Journal, Bd. 28, 1844, S. 248.

Die unmittelbare Anwendung der geometrischen Versinnlichung der komplexen Grössen auf das Dreieck, das Viereck, den Kreis, die Kegelschnitte, die Kugel ist ein Gegenstand, mit dem sich GAUSS sein ganzes Leben lang immer wieder beschäftigt hat; ja er hat diese Art der Behandlung geometrischer Probleme als »eine ihm eigentümliche Methode« bezeichnet (Brief an SCHUMACHER vom 12. Mai 1843, W. VIII, S. 295). Die betreffenden Untersuchungen werden im vierten Abschnitt dieses Aufsatzes im Zusammenhang mit den Arbeiten zur elementaren und analytischen Geometrie ausführlich dargestellt werden.

Ausserdem ist die konforme Abbildung krummer Flächen zu erwähnen. Allerdings hat GAUSS in der Kopenhagener Preisschrift vom Jahre 1822 sich bezüglich der geometrischen Versinnlichung auf Andeutungen beschränkt, die kaum über das hinausgehen, was man in seiner Dissertation lesen kann. Im übrigen sei auf die Darstellung im fünften Abschnitt dieses Aufsatzes verwiesen.

19.

Weiterentwicklung der Lehre von den komplexen Grössen.

GAUSS schliesst in der Selbstanzeige vom Jahre 1831 seine Auseinandersetzungen über die imaginären Grössen mit den Worten: »Hier ist also die Nachweisbarkeit einer anschaulichen Bedeutung von $\sqrt{-1}$ vollkommen gerechtfertigt und mehr bedarf es nicht, um diese Grösse in das Gebiet der Gegenstände der Arithmetik zuzulassen« (W. II, S. 177). In ähnlicher Weise hat er sich später (um 1850) in dem schon erwähnten Entwurf einer Abhandlung über die Konvergenz der Reihen ausgesprochen: »Die imaginären Grössen sind, solange ihre Grundlage immer nur in einer Fiktion bestand, in der Mathematik nicht sowohl wie eingebürgert, als vielmehr nur wie geduldet betrachtet, und weit davon entfernt geblieben, mit den reellen Grössen auf gleiche Linie gestellt zu werden. Zu einer solchen Zurücksetzung ist aber jetzt kein Grund mehr, nachdem die Metaphysik der imaginären Grössen in ihr wahres Licht gesetzt und nachgewiesen ist, dass diese, ebenso gut wie die negativen, ihre reale gegenständliche Bedeutung haben« (W. X 1, S. 404).

JOHANN BOLYAI hat in einer 1837 verfassten, aber erst 1899 aus seinem Nachlass veröffentlichten Schrift (BOL. II, S. 233) gegen die Ausführungen von GAUSS in der Selbstanzeige vom Jahre 1831 eine Reihe Einwendungen erhoben.

darunter auch die, dass GAUSS »sich auf die Betrachtung des Raumes stütze, die man in der Arithmetik vermeiden soll«, und er hatte selbst eine rein arithmetische Einführung der komplexen Grössen gegeben, die im Wesentlichen mit HAMILTONS[1]) gleichzeitiger Begründung durch das Rechnen mit Grössenpaaren übereinstimmt. Verschiedene Äusserungen von GAUSS gestatten den Schluss, dass auch er, eine 1831 im Keime vorhandene Auffassung weiter entwickelnd, später zu einer von räumlichen Betrachtungen unabhängigen Auffassung der komplexen Grössen übergegangen ist.

In der Selbstanzeige vom Jahre 1831 wird ausgeführt, dass die komplexen Grössen zur Darstellung der Relationen dienen können, die zwischen den Elementen einer Mannigfaltigkeit von zwei Dimensionen stattfinden, und es heisst dann, dass sich diese Verhältnisse nur durch eine Darstellung in der Ebene zur Anschauung bringen liessen (W. II, S. 176). Noch entschiedener sagt GAUSS in dem zweiten Entwurf einer Abhandlung über die Konvergenz der Reihen (um 1850): »Zuvörderst ist die bekannte Versinnlichung der komplexen Grössen in Erinnerung zu bringen. . . . Es wird damit nur bezweckt, die Bewegung in dem an sich vom Räumlichen unabhängigen Felde der abstrakten komplexen Grössen zu erleichtern und eine Sprache für dasselbe zu vermitteln« (W. X 1, S. 407).

Diese Sprache für die Lehre von den »abstrakten« komplexen Grössen hat GAUSS in ihren Anfängen geformt. Eine nach der Stetigkeit fortschreitende Reihe komplexer Grössen bildet einen Zug; jede der dem Zuge angehörigen Grössen ist eine S t e l l e des Zuges. Ist der Zug geschlossen, so fügen sich die nach der Stetigkeit zusammenhängenden komplexen Grössen, die in dem Zuge ihre Begrenzung finden, zu einer S c h i c h t zusammen. Man erkennt, dass die geometrischen Namen Linie, Punkt, Fläche vermieden werden. In einer Fussnote wird noch hervorgehoben, dass »die abstrakte allgemeine Lehre von den komplexen Grössen mit der Wechselbeziehung zwischen vorwärts-rückwärts und rechts-links nichts zu schaffen hat« (W. X 1, S. 408).

Was man vermisst, ist eine Erklärung, in welchem Sinne die formalen Bildungen $x+iy$ als G r ö s s e n bezeichnet werden dürfen. GAUSS dürfte auch hierüber seine Gedanken gehabt haben, denn in dem bereits angeführten Briefe

---

1) R. W. HAMILTON, *Theory of conjugate functions, or algebraic couples,* Transactions of the Royal Irish Academy, Vol. 17, Dublin 1837, S. 393.

an Bessel vom 21. November 1811, in dem er von den Funktionen einer komplexen Veränderlichen spricht, sagt er: »Man sollte überhaupt nie vergessen, dass die Funktionen, wie alle mathematischen Begriffszusammensetzungen, nur unsere eigenen Geschöpfe sind und dass, wo die Definition, von der man ausging, aufhört, einen Sinn zu haben, man eigentlich nicht fragen soll: Was ist? sondern was konveniert anzunehmen? damit ich immer konsequent bleiben kann. So z. B. das Produkt aus —. —« (W. X 1, S. 363). Wenn man die Äusserungen über die allgemeine Arithmetik in der Selbstanzeige vom Jahre 1831 hinzunimmt, wo das Gebiet der Zahlen stufenweise erweitert wird (W. II, S. 175), so ergibt sich, wie nahe Gauss dem Prinzip der Permanenz gekommen ist.

20.

Komplexe Grössen mit mehr als zwei Einheiten.

In dem Brief an Grassmann vom 14. Dezember 1844 sagt Gauss, auf dessen ihm übersandte Ausdehnungslehre Bezug nehmend, »dass die Tendenzen derselben teilweise denjenigen Wegen begegnen, auf denen ich selbst nun fast seit einem halben Jahrhundert gewandelt bin und wovon freilich nur ein kleiner Teil 1831 in den Comment. der Göttingischen Societät und noch mehr in den Göttingischen Gelehrten Anzeigen (1831, Stück 64) gleichsam im Vorbeigehen erwähnt ist; nämlich die konzentrierte Metaphysik der komplexen Grössen, während von der unendlichen Fruchtbarkeit dieses Prinzips für Untersuchungen räumliche Verhältnisse betreffend zwar vielfältig in meinen Vorlesungen gehandelt[1]), aber Proben davon nur hin und wieder, und als solche nur dem aufmerksamern Auge erkennbar, bei andern Veranlassungen mitgeteilt sind« (W. X 1, S. 436). Solche Proben finden sich in der Dissertation, in der Kopenhagener Preisschrift und in verschiedenen kleineren Aufsätzen zur elementaren Mathematik, über die im vierten Abschnitt berichtet werden wird.

Von der Selbstanzeige in den Göttingischen Anzeigen kommt hier besonders der Schluss in Betracht. »Der Verfasser hat sich vorbehalten, den Gegenstand [der komplexen Grössen], welcher in der vorliegenden Abhandlung

1) Zum Beispiel hat Gauss vom Dezember 1839 bis Ostern 1740 eine Vorlesung *über die Theorie der imaginären Grössen* gehalten, von der zwei Stücke in den Werken abgedruckt sind (W. VIII, S. 331—334 und S. 346—347).

eigentlich nur gelegentlich berührt ist, künftig vollständiger zu bearbeiten, wo dann auch die Frage, warum die Relationen zwischen Dingen, die eine Mannigfaltigkeit von mehr als zwei Dimensionen darbieten, nicht noch andere in der allgemeinen Arithmetik zulässige Grössen liefern können, ihre Beantwortung finden wird« (W. II, S. 178).

Leider ist Gauss nicht dazu gekommen, das hier gegebene Versprechen einzulösen, und auch die wenigen im Nachlass vorhandenen Aufzeichnungen, die man damit in Beziehung bringen kann, reichen nicht aus, um festzustellen, was er mit seinen Andeutungen gemeint hatte.

Ebenso wie den Punkten der Ebene aus den Einheiten 1 und i gebildete bikomplexe Grössen (W. VIII, S. 354) zugeordnet werden, kann man für die Punkte des Raumes trikomplexe Grössen benutzen (W. VIII, S. 353, 354). Gelegentlich hat Gauss geradezu den drei kartesischen Koordinaten x, y, z die drei Einheiten $1, i, k$ zugesellt und zum Beispiel die Ecken eines Ikosaeders und eines Dodekaeders durch trikomplexe Grössen $x+iy+kz$ dargestellt (Handbuch 16 Bb. S. 166). Es entsteht dann die Frage, wie man mit solchen Grössen rechnen und im besonderen, wie man für sie das Produkt definieren soll. Gauss hat, den Kern des Problems erfassend, schon 1819 viergliedrige komplexe Grössen betrachtet, die er Mutationsskalen nennt (W. VIII, S. 357—362). Ihre geometrische Bedeutung besteht darin, dass sie die Drehung eines Raumes in einem andern Raume verbunden mit einer Vergrösserung oder Verkleinerung ausdrücken, und Gauss ist dazu gelangt, die Multiplikation zweier solcher Grössen so zu erklären, dass das Produkt das geometrische Ergebnis zweier hintereinander ausgeführter Mutationen darstellt. Auf diese Art ist er zu einem Multiplikationsgesetz gelangt, das mit dem der Hamiltonschen Quaternionen übereinstimmt.

Weitere Ausführungen über die mehrdimensionalen Mannigfaltigkeiten bei Gauss findet man in Nr. 33 dieses Aufsatzes.

Abschnitt IV.

Elementare und analytische Geometrie.

21.

Allgemeines.

Im ersten Abschnitt (Nr. 10) ist über verschiedene Untersuchungen von GAUSS berichtet worden, die entweder unmittelbar zur elementaren Geometrie gehören oder doch eng damit zusammenhängen, bei denen aber das Axiomatische überwiegt. Auf andere Untersuchungen wurde im dritten Abschnitt hingewiesen, weil bei ihnen die Anwendung komplexer Grössen mitspielt. Für deren Gebrauch hatte GAUSS eine gewisse Vorliebe, und seine Ausdehnung erstreckt sich weiter, als man zunächst glauben möchte; GAUSS hat sich nämlich lange Zeit gescheut, mit seiner geometrischen Versinnlichung des Imaginären öffentlich hervorzutreten, und hat deshalb seine Lösungen in einer davon befreiten Form dargestellt. Wie gern er mit dem »*i*« arbeitet, zeigt übrigens auch sein Ansatz für das Problem der acht Königinnen, bei dem die Felder des Schachbrettes mit den Zahlen $a+ib$ ($a, b = 1, 2, \ldots, 8$) bezeichnet werden (Brief an SCHUMACHER vom 27. September 1850, Br. G.-SCH. VI, S. 120).

GAUSS hat es erlebt, dass den ursprünglichen, rein geometrischen Überlegungen und dem später hinzugekommenen Rechnen mit Koordinaten andere Verfahren zur Lösung geometrischer Aufgaben an die Seite traten, wie der *Barycentrische Calcul* von MÖBIUS und GRASSMANNS *Ausdehnungslehre*. Über den Wert und die Wirksamkeit solcher Methoden hat er sich in dem Brief an SCHUMACHER vom 15. Mai 1843 mit grosser Klarheit ausgesprochen. »Überhaupt verhält es sich mit allen solchen Kalküls so, dass man durch sie nichts leisten kann, was nicht auch ohne sie zu leisten wäre; der Vorteil ist aber der, dass, wenn ein solcher Kalkül dem innersten Wesen vielfach vorkommender Bedürfnisse korrespondiert, jeder, der sich ihn ganz angeeignet hat, auch ohne die gleichsam unbewussten Inspirationen des Genies, die niemand erzwingen kann, die dahin gehörigen Aufgaben lösen, ja selbst in so verwickelten Fällen gleichsam mechanisch lösen kann, wo ohne eine solche Hilfe auch das Genie ohnmächtig wird. So ist es mit der Erfindung der Buchstabenrechnung über-

haupt; so mit der Differentialrechnung gewesen: so ist es auch (wenn auch in partielleren Sphären) mit LAGRANGES Variationsrechnung, mit meiner Kongruenzrechnung und mit MÖBIUS' Kalkül. Es werden durch solche Konzeptionen unzählige Aufgaben, die sonst vereinzelt stehen und jedesmal neue Efforts (kleinere oder grössere) des Erfindungsgeistes erfordern, gleichsam zu einem organischen Reiche« (W. VIII, S. 298).

Die Arbeiten von GAUSS, über die hier berichtet werden soll, betreffen fast den ganzen Umkreis der elementaren Geometrie, die Anfänge der analytischen Geometrie eingeschlossen. Eine erste Reihe bezieht sich auf die Eigenschaften des Dreiecks, des Vierecks und der Vielecke, eine zweite auf den Kreis und die Kugel, die Kegelschnitte und die Flächen zweiter Ordnung. Dazu kommen endlich die Beiträge zur sphärischen Trigonometrie, die in einer Schlussnummer zusammengefasst sind.

Man könnte diesen Teil des Werkes von GAUSS übergehen, ohne dass sein Ruhm geschmälert würde. Allein es gilt dafür das Wort seines Schülers und Freundes SCHUMACHER: »Deutlich genug ist des Meisters Stempel auch seinen Erholungen aufgedrückt«[1]).

22.

Das Dreieck.

Rein geometrisch ist der in die Lehrbücher der Elementargeometrie übergegangene klassische Beweis für den Satz, dass die drei Höhen des Dreiecks sich in einem Punkte schneiden (W. IV, S. 396); er ist 1810 in den Zusätzen veröffentlicht worden, die GAUSS zu SCHUMACHERS Übersetzung der *Géométrie de position* von CARNOT beigesteuert hat (Teil 2, Zusatz II. S. 363) Auf einem verwandten Gedanken beruht der weniger bekannte Beweis von NAUDÉ; dieser zeigt, dass das Dreieck der Höhenfusspunkte die Höhen zu Winkelhalbierenden hat[2]).

In denselben Zusätzen (Zusatz I, S. 359) hat GAUSS mittels der Methoden der analytischen Geometrie einen merkwürdigen Punkt des Dreiecks nach-

1) L. CARNOT, *Geometrie der Stellung*, übersetzt von H. C. SCHUMACHER, 2. Teil, Altona 1810, Vorrede, S. II.

2) PH. NAUDÉ, *Trigonoscopiae cuiusdam novae conspectus*, Miscellanea Berolinensia, t. V, 1737, S. 10; siehe besonders S. 17.

gewiesen, von dem die Durchschnittspunkte der Höhen, der Mittelsenkrechten und der Schwerlinien besondere Fälle sind (W. IV, S. 393).

Eine handschriftliche Bemerkung zum Zusatz II lehrt, wie die genannten Durchschnittspunkte mit den komplexen Zahlen zusammenhängen, die den Ecken des Dreiecks zugeordnet sind (W. IV, S. 396). Mittels komplexer Grössen ist sicherlich auch die Lösung der Aufgabe gewonnen worden, die Lage eines Punktes aus den Verhältnissen seiner Abstände von drei der Lage nach bekannten Punkten zu finden (W. VIII, S. 303).

Endlich ist noch ein Beweis des Pythagoreischen Lehrsatzes aus dem Jahre 1797 (T. Nr. 81) zu nennen, der auf der Ähnlichkeit von Dreiecken beruht[1]).

23.

Das Viereck.

Als Gauss die Zusätze zu Schumachers Übersetzung des Carnotschen Werkes verfasste, löste er auch eine Aufgabe, die Schumacher im Oktober 1809 gestellt hatte, als Gauss, Bessel und er selbst ihren gemeinsamen Freund Olbers in Bremen besuchten, die Aufgabe nämlich, in einem Viereck diejenige Ellipse zu beschreiben, die den grössten möglichen Flächenraum umfasst. Schumacher hatte sie den durch Montucla erneuerten *Récréations mathématiques et physiques* von Ozanam (Paris 1778) entnommen. Im Dezember 1809 wurde Gauss von Bessel an die Aufgabe erinnert (Br. G.-Bessel S. 104). »Es ist ein merkwürdiges Beispiel«, antwortet dieser am 7. Januar 1810, »wieviel bisweilen von der Wahl der unbekannten Grössen abhängt. Ich setzte mich gleich daran und kam, da ich zufällig hierin eine glückliche Wahl getroffen hatte, sofort darauf, dass das ganze Problem bloss auf eine Gleichung zweiten Grades sich reduziert« (Br. G.-Bessel S. 107). Die »glückliche Wahl« kam darauf hinaus, dass er komplexe Grössen verwandte; in der Darstellung der Lösung, die Gauss Schumacher mitteilte, ist dieser Ursprung zwar verhüllt worden, aber doch noch deutlich genug sichtbar geblieben.

Nachdem Gauss am 10. Februar 1810 an Schumacher geschrieben hatte,

---

1) Ber Beweis von Gauss ist den 96 Beweisen hinzuzufügen, die J. Versluys gesammelt hat: *Zes en negentig bewijzen voor het theorema van Pythagoras*, Amsterdam 1914; von den dort mitgeteilten Beweisen kommt dem Gaussschen am nächsten der von Brand, *Une nouvelle démonstration de Pythagore*, Journal de mathématiques élémentaires, série 5, t. 21, 1897, S. 36.

er habe eine sehr artige Auflösung gefunden und sei nicht abgeneigt, sie bekannt zu machen (Br. G.-Sch. I, S. 26), wurde die Aufgabe, wohl auf Schumachers Veranlassung, im Maiheft der Monatlichen Correspondenz[1] den Mathematikern vorgelegt, und das Augustheft brachte (S. 112—121) die Lösung von Gauss (W. IV, S. 385). Im Besonderen wird darin der Lehrsatz bewiesen, dass der geometrische Ort der Mittelpunkte der Ellipsen, die die vier Seiten des Vierecks berühren, eine Gerade ist; daraus folgt als Zusatz, dass die Mitten der drei Diagonalen eines Vierseits auf einer Geraden liegen.

Das Septemberheft der Correspondenz enthält zwei weitere Lösungen, die von J. Fr. Pfaff und Mollweide herrühren[2]; eine vierte, von Buzengeiger eingesandte konnte wegen Mangel an Raum nicht abgedruckt werden[3]. Pfaff bemerkt, dass jener geometrische Ort schon bei Newton[4] und Euler[5] zu finden sei. Endlich gab Schumacher im Novemberheft[6] eine Ergänzung, indem er zeigte, dass unter Umständen eine innerhalb des Vierecks liegende Ellipse, die nur drei Seiten berührt, den grössten Inhalt liefert. Die Aufgabe ist später wiederholt bearbeitet worden; Plücker, Schläfli und Steiner haben sich um sie bemüht[7].

In die Zeit um 1810 gehört auch wohl eine Aufzeichnung, die sich auf der letzten Seite des Gaussschen Exemplares des ersten Teiles der Schumacherschen Übersetzung befindet. Carnot hatte in einer 1806 erschienenen Abhandlung, die Schumacher in seine Ausgabe aufgenommen hat, die zwischen den Seiten und den Diagonalen eines Vierecks bestehende Gleichung her-

---

1) Monatliche Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde, herausgegeben von v. Zach, Bd. 21, 1810, S. 462.

2) Monatliche Correspondenz, Bd. 22, 1810, S. 223 und 227.

3) A. a. O., S. 513.

4) I. Newton, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, London 1687, Liber I, Lemma 25; im Corollarium 3 wird auch der Satz ausgesprochen, dass die Mitten der Diagonalen eines Vierseits auf einer Geraden liegen.

5) L. Euler, *Introductio in analysin*, T. II, Lausanne 1748, § 123.

6) Monatliche Correspondenz, Bd. 22, 1810, S. 505.

7) J. Plücker, *Analytisch-geometrische Entwicklungen*, Band II, Essen 1831, S. 208; L. Schläfli, *Anwendungen des barycentrischen Calculs*, Archiv der Mathematik und Physik, Bd. 12, 1849, S. 99; J. Steiner, *Teoremi relativi alle coniche inscritte e circoscritte*, Giornale arcadico, t. 99, S. 147, Crelles Journal, Bd. 30, 1845, S. 17, Gesammelte Werke, Bd. II, S. 334. Euler hat die duale Aufgabe behandelt, um ein gegebenes Viereck die kleinste Ellipse zu beschreiben, Nova acta acad. sc. Petrop. 9 (1791), 1795, S. 132; vorgelegt den 4. Sept 1777.

geleitet (2. Teil, S. 258), und GAUSS gibt einen einfachen Beweis dieser für die Ausgleichungsrechnungen der Geodäsie wichtigen Beziehung (W. IX, S. 248).

Mit den geodätischen Messungen, die GAUSS von 1821 bis 1825 anstellte, hängt es auch zusammen, dass er sich eingehend mit einer Aufgabe beschäftigt hat, die nach einem Mathematiker, der weder ihr Urheber noch ihr erster Löser ist, der sich aber Verdienste um sie erworben hat, häufig als POTHENOTsches Problem bezeichnet wird[1]. Es handelt sich darum, bei einer trigonometrischen Aufnahme die Lage eines Punktes dadurch festzulegen, dass die Winkel gemessen werden, welche die von ihm nach drei bekannten Punkten (Netzpunkten) gehenden Richtungen miteinander bilden (Rückwärtseinschneiden). Die im Nachlass von GAUSS befindlichen umfangreichen Aufzeichnungen über das POTHENOTsche Problem aus den Jahren 1832 bis 1852 werden ergänzt durch Briefe an GERLING und SCHUMACHER aus den Jahren 1830 bis 1842 und durch die Ausarbeitung einer im Jahre 1840 gehaltenen Vorlesung *über die Theorie der imaginären Grössen* (W. VIII, S. 307—334).

Die Heranziehung der komplexen Grössen erweist sich hier als besonders nützlich. Indem GAUSS den Ecken a_0, a_1, a_2, a_3 des Vierecks, das aus dem festzulegenden Punkt und den drei Netzpunkten besteht, das Dreieck zuordnet, dessen Ecken durch die aus der Lehre von den biquadratischen Gleichungen wohlbekannten Verbindungen

$$a_0 a_1 + a_2 a_3, \quad a_0 a_2 + a_3 a_1, \quad a_0 a_3 + a_1 a_2$$

bestimmt werden, gelangt er zu seiner »zierlichen Auflösung«; zu demselben Dreieck war übrigens schon COLLINS durch einen geometrischen Kunstgriff gelangt[2].

GAUSS eigentümlich ist die Frage nach der »physischen Möglichkeit der Daten in POTHENOTS Aufgabe«. Wenn nämlich beim Rückwärtseinschneiden der Punkt gesucht wird, von dem aus zwei gegebene, aneinander stossende Strecken unter gemessenen Winkeln erscheinen, so ist man sicher, dass die

1) L. POTHENOT, *Problème de Géométrie pratique*, Mém. de l'Acad. depuis 1666 jusqu'à 1699, t. 10, Paris 1730, S. 150 (vorgelegt 1692). Für das Geschichtliche vgl. die Dissertation von R. WAGNER, *Über das Pothenotsche Problem*, Göttingen 1852 und die Angaben in J. C. POGGENDORFFs Biographisch-literarischem Handwörterbuch, II, Leipzig 1863, Spalte 509.

2) J. COLLINS, *A solution of a chorographical problem*, Philosophical transactions. Vol. 6. Nr 69. London, März 1671.

Aufgabe, sobald nur der gefährliche Kreis vermieden wird, eine bestimmte Lösung hat. Anders steht es, wenn jene Winkel willkürlich angenommen werden. Dann braucht es keine Lösung zu geben, und es entsteht die Frage nach einem Kennzeichen für die Lösbarkeit; GAUSS hat darauf eine überraschend einfache Antwort gegeben.

Warum, wird man fragen, hat GAUSS auf einen so elementaren Gegenstand so viel Zeit und Mühe verwendet? Aufschluss hierüber gibt der Brief an GERLING vom 14. Januar 1842. Nachdem er diesem das Kennzeichen mitgeteilt hat, bittet er ihn, es für sich zu behalten, »weil ich das Theorem, womit es zusammenhängt, selbst einmal bei schicklicher Gelegenheit zu behandeln mir vorbehalte, weniger wegen der Eleganz des Theorems an sich, als wegen der Eleganz, welche die Anwendung der komplexen Grössen dabei darbietet, also namentlich bei einer Gelegenheit, wo ich mehr von dem Gebrauch der komplexen Grössen sagen kann« (W. VIII, S. 315)[1].

24.

Die Vielecke.

Durch eine Anfrage von SCHUMACHER vom 19. März 1836 veranlasst (W. X 1, S. 459) hat sich GAUSS mit der Frage nach dem »kürzesten Verbindungssystem« von beliebig vielen, im Besonderen von vier Punkten beschäftigt (W. X 1, S. 461—467), einer glücklichen Verallgemeinerung der Summe der Entfernungen eines Punktes von gewissen gegebenen Punkten, die noch heute eingehendere Erforschung verdiente[2].

Die Lösung der Aufgabe, in einen gegebenen Kreis ein Vieleck zu beschreiben, dessen Seiten durch je einen gegebenen Punkt gehen, ist wieder der Verwendung komplexer Grössen entsprungen (W. IV, S. 398, Zusatz V, S. 369).

Im ersten Abschnitt (Nr. 10) ist bemerkt worden, dass GAUSS die Frage aufgeworfen hat, was man unter dem Inhalt eines beliebigen Vielecks zu ver-

---

1) Für die Behandlung geometrischer Aufgaben mittels komplexer Grössen vgl. noch die Dissertation von H. ZUR NEDDEN, *Applicatio numeri complexi ad demonstranda nonnulla geometriae theoremata*, Göttingen 1840.

2) Vgl. auch die Dissertation von K. BOPP, *Das kürzeste Verbindungssystem von vier Punkten*, Göttingen 1879.

stehen habe. Auf den Inhalt eines Vielecks bezieht sich die folgende Stelle in dem Zusatz I zu SCHUMACHERS Übersetzung der *Géométrie de position* von CARNOT[1] (S. 362):

Anmerkung des Herausgebers (SCHUMACHER). »Es ist, nach einem schönen Theorem des Herrn Professor GAUSS, der Inhalt eines Vielecks von n Seiten, wenn die Koordinaten der Winkelpunkte nach der Reihe in einer Richtung gezählt:

$$x, y; \; x', y'; \; \ldots \; x^{(n-1)}, y^{(n-1)}$$

sind,

$$= \tfrac{1}{2}\{x(y'-y^{(n-1)}) + x'(y''-y) + x''(y'''-y') + \cdots + x^{(n-1)}(y-y^{(n-2)})\},$$

worüber Er selbst vielleicht, bey einer andern Gelegenheit, uns eine vollständigere Abhandlung schenken wird«.

Die Ankündigung einer vollständigeren Abhandlung macht es wahrscheinlich, dass GAUSS schon damals die Verallgemeinerung auf beliebige Vielecke im Auge hatte, bei denen also der Umfang sich selbst durchsetzen kann, wie er sie in dem Brief an OLBERS vom 30. Oktober 1825 andeutet (W. VIII, S. 398)[2]. In einer aus dem Nachlass 1866 herausgegebenen Abhandlung hat JACOBI eine Regel für die Bestimmung des Inhalts gegeben[3].

In der Behaftung von Inhalten mit Vorzeichen ist MÖBIUS mit GAUSS zusammengetroffen, zuerst im *Barycentrischen Calcul* (1827)[4], dann in der Abhandlung *über den Inhalt der Polyeder* (1865)[5]. Wenn die Mathematiker des 20. Jahrhunderts diese Dinge als selbstverständlich ansehen, so hat doch

---

1) Werke XI 1.

2) In dem Brief an OLBERS vom 30. Oktober 1825 bemerkt GAUSS, er habe »erst vor kurzem eine Abhandlung von MEISTER im ersten Bande der Novi Commentarii Gotting. kennen gelernt, worin die Sache fast ganz auf gleiche Art betrachtet und sehr schön entwickelt wird«; gemeint ist die Abhandlung von A. L. F. MEISTER, *Generalia de genesi figurarum planarum et inde pendentibus earum affectionibus*, Novi Commentarii acad. Gotting., vol. I ad annos 1769/70, 1771, S. 144.

3) C. G. J. JACOBI, *Regel zur Bestimmung des Inhalts der Sternpolygone*, Journal für die r. u. a. Mathematik Bd. 65, 1866, S. 173, Werke VII, S. 40; vgl. auch W. VELTMANN, *Berechnung des Inhalts eines Vielecks aus den Coordinaten der Eckpunkte*, Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 32, 1887, S. 339. Nach L. KÖNIGSBERGER, *C. G. J. Jacobi*, Leipzig 1904, S. 155 hat JACOBI seine Regel im Sommer 1833 gefunden.

4) A. F. MÖBIUS, *Der barycentrische Calcul*, Leipzig 1827, Kap. II, § 17 und 18; Werke I, S. 39—41.

5) A. F. MÖBIUS, *Über die Bestimmung des Inhaltes eines Polyeders*, Leipziger Berichte, Bd. 17, 1865, S. 31, Werke II, S. 485—491.

BALTZER, in den Erinnerungen an die GAUSSschen Zeiten wurzelnd, mit Recht hervorgehoben, dass die Bestimmung des Zeichens einer Strecke nach der voraus bestimmten positiven Richtung einer Geraden, einer Dreiecksfläche nach dem voraus bestimmten positiven Sinn ihrer Ebene und eines Tetraederinhalts nach einem voraus bestimmten Schraubungssinn beim Erscheinen des *Barycentrischen Calculs* »neu und fast befremdend« erschienen seien[1]).

GAUSS hat auch eine von MÖBIUS gestellte Aufgabe[2]) gelöst, die besagt, man solle den Inhalt eines Fünfecks aus den Inhalten der fünf Dreiecke bestimmen, die von den Verbindungsstrecken der fünf Eckpunkte gebildet werden (W. IV, S. 406).

25.

Der Kreis und die Kugel.

Das *Tagebuch* von GAUSS beginnt mit der Eintragung vom 30. März 1796: »Principia quibus innititur sectio circuli, ac divisibilitas eiusdem geometrica in septemdecim partes etc«. Nach dem Briefe an GERLING vom 6. Januar 1819 hatte er die Entdeckung am Morgen des 29. März 1796 gemacht (W. X 1, S. 125). »Sie ist es vornehmlich gewesen, welche seinem Leben eine bestimmte Richtung gab, denn von jenem Tage an war er fest entschlossen, nur der Mathematik sein Leben zu widmen« (SARTORIUS, S. 16). Die Konstruktion des regelmässigen Siebzehnecks ist geometrisch ausführbar, insofern sie sich allein durch Lineal und Zirkel bewerkstelligen lässt, jedoch beruht der Beweis bei all' den verschiedenen Durchführungen auf der algebraischen Grundlage der Kreisteilungsgleichung[3]). GAUSS hat in den Göttinger Anzeigen vom 19. Dezember 1825 eine Konstruktion von ERCHINGER mitgeteilt. Für diese Konstruktion habe ERCHINGER eine rein geometrische Begründung gegeben, »mit musterhafter, mühsamer Sorgfalt, alles nicht rein Elementarische zu vermeiden« (W. II, S. 187). Sie ist uns leider verloren gegangen, da ERCHINGERS Abhandlung nicht gedruckt wurde[4]).

---

1) R. BALTZER, *Vorrede über Mobius*, MÖBIUS' Werke I, S. VIII.

2) A. F. MÖBIUS, *Beobachtungen auf der Sternwarte zu Leipzig usw.*, Leipzig 1823, S. 57; Werke I, S. 394.

3) Vgl. R. GOLDENRING, *Die elementargeometrischen Konstruktionen des regelmässigen Siebzehnecks*, Dissertation, Jena 1915. Die zeitlich älteste Konstruktion ist die dort noch nicht erwähnte von PFLEIDERER, die erst 1917 (Werke X 1, S. 120) veröffentlicht worden ist.

4) Die Abhandlung ERCHINGERS hatte GAUSS von einem Braunschweiger Bekannten, dem Juristen

In dem Zusatz VI zu CARNOTS *Geometrie der Stellung* (2. Teil, S. 371, W. IV, S. 399) wird eine analytische Lösung der Aufgabe gegeben, einen Kreis zu beschreiben, der drei der Grösse und Lage nach gegebene Kreise berührt, »vielleicht die einfachste Konstruktion des Apollonischen Problems«, wie SIMON sagt[1]; sie ist wiederum der Benutzung komplexer Grössen zu verdanken.

Um das Jahr 1840 hat GAUSS den Begriff der harmonischen Punktepaare auf einer Geraden verallgemeinert, indem er die vier Abszissen als komplexe Grössen auffasst, denen Punkte einer Ebene zugeordnet sind (W. VIII, S. 336—337). Hierin liegt ein fruchtbares Übertragungsprinzip, das MÖBIUS, hier wiederum mit GAUSS zusammentreffend, ausgebaut hat[2]. Später ist MÖBIUS zum allgemeinen Doppelverhältnis übergegangen und zu seiner Lehre von der Kreisverwandtschaft gelangt, bei der zwischen zwei Ebenen durch eine bilineare Gleichung in den lagebestimmenden komplexen Grössen eine Beziehung hergestellt wird[3].

Auch den Punkten einer Kugelfläche hat GAUSS schon sehr früh komplexe Grössen zugeordnet, vermutlich mittels der stereographischen Projektion; dies zeigt die schon angeführte Bemerkung über das elliptische Integral erster Gattung aus dem Jahre 1800 (W. X 1, S. 546). In einer späteren Aufzeich-

E. SCHRADER in Tübingen, am 1. Sept. 1825 zugesandt erhalten. Hiernach war ERCHINGER, der sonst ganz unbekannt ist, ein mathematischer Autodidakt, der etwa seit 1813 in Tübingen lebte. Er hatte einen Beitrag geliefert zu der Abhandlung SCHRADERS: *Commentatio de summatione seriei*

$$\frac{a}{b(b+d)}+\frac{a}{(b+2d)(b+3d)}+\frac{a}{(b+4d)(b+5d)}+\cdots,$$

Weimar 1818, die einen Preis der Kopenhagener Gesellschaft der Wissenschaften erhalten hatte. Nach SCHRADERS Brief an GAUSS vom 20. April 1831 war ERCHINGER inzwischen gestorben (Briefe im GAUSS-Archiv). Vgl. auch KLÜGELS *Mathematisches Wörterbuch*, IV. Teil, Leipzig 1823, S. 652 (Artikel Summierung der Reihen).

1) M. SIMON, *Über die Entwicklung der Elementargeometrie im XIX. Jahrhundert*, I. Ergänzungsband des Jahresberichtes der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Leipzig 1906, S. 98; man findet hier S. 97—105) eine Zusammenstellung der umfangreichen Literatur über das Apollonische Taktionsproblem.

2) A. F. MÖBIUS, *Über eine Methode, um von Relationen, welche der Longimetrie angehören, zu den entsprechenden Sätzen der Planimetrie zu gelangen*, Leipziger Berichte, Bd. 4, 1852, S. 41, Werke II, S. 189.

3) A. F. MÖBIUS, *Über eine neue Verwandtschaft zwischen ebenen Figuren*, Leipziger Berichte, Bd. 5, 1853, S. 14, Werke II, S. 205; später hat MÖBIUS die Kreisverwandtschaft rein geometrisch begründet: *Die Theorie der Kreisverwandtschaft in rein geometrischer Darstellung*, Leipziger Abhandlungen, Bd. 4, 1855, S. 529; Werke II, S. 213.

nung, die vor 1819 niedergeschrieben ist, hat er den durch die stereographische Projektion vermittelten Zusammenhang zwischen Ebene und Kugel genauer untersucht und dabei erkannt, dass die »Drehungen der Kugelfläche in sich selbst« durch gewisse lineare, gebrochene Substitutionen der lagebestimmenden komplexen Grösse dargestellt werden können (W. VIII, S. 354—356); man kennt die Bedeutung, die diese Substitutionen später gewonnen haben[1]).

26.

Kegelschnitte und Flächen zweiter Ordnung.

Auf die Lehre von den Kegelschnitten ist GAUSS als Astronom immer wieder geführt worden. Besonders eifrig hat er sich damit im Frühjahr 1843 beschäftigt. In dem Briefe an SCHUMACHER vom 12. Mai 1843 erzählt er, dass er »anfangs durch zufällige Umstände« seit vier bis sechs Wochen in einige mathematische Spekulationen hineingezogen worden sei, »wo ich immer wieder durch neue Aussichten in andere Richtungen gelenkt wurde und vieles erreicht, vieles verfehlt habe. . . . Jene Spekulationen betrafen grossenteils weniger neue Sachen als Durchführung mir eigentümlicher Methoden: zuletzt u. a. mehreres sich auf die Kegelschnitte Beziehendes. Mir ist dabei wiederholt in Erinnerung gekommen, wie ich vor einem halben Jahrhundert, als ich zuerst NEWTONS *Principia* las[2]), mehreres unbefriedigend fand, namentlich seine an sich herrlichen Sätze die Kegelschnitte betreffend. Aber ich las immer mit dem Gefühl, dass ich durch das Erlernte nicht Herr der Sache wurde; besonders quälte mich die gerade Linie, mit deren Hilfe ein Kegelschnitt beschrieben werden kann[3]). . . . Herr des Gegenstandes ist man doch erst dann, wenn man alle andern, diese magische gerade Linie betreffenden Fragen beantworten kann; namentlich will man wissen, welche Relationen diese gerade

1) Vgl. für die von RIEMANN benutzte Verwendung der Kugel zur Darstellung komplexer Grössen C. NEUMANN, *Vorlesungen über Riemanns Theorie der Abelschen Integrale,* Leipzig 1865, für die linearen Substitutionen F. KLEIN, *Vorlesungen über das Ikosaeder,* Leipzig 1884, erster Abschnitt, Kapitel II.

2) GAUSS hat sein Exemplar der *Principia* im Jahre 1794 erworben.

3) Es handelt sich um die Konstruktion eines Kegelschnitts mittels zweier um ihre Scheitelpunkte drehbarer Winkel, deren eines Schenkelpaar sich auf einer Geraden schneidet, während der Durchschnittspunkt des anderen Schenkelpaares den Kegelschnitt beschreibt, I. NEWTON, *Philosophiae naturalis principia mathematica,* London 1687, Liber I, sectio 5, Lemma 21. Vgl. auch C. MACLAURIN, *Geometria organica, sive descriptio linearum curvarum universalis,* London 1720, erster Abschnitt.

Linie zu den Elementen des Kegelschnittes habe, ob man diese Elemente selbst mit Leichtigkeit aus der Lage jener geraden Linie und der [gegebenen Punkte des Kegelschnittes] ableiten könne. Verschiedenes dieser Art kann ich jetzt recht artig ausrichten, ich weiss aber nicht, ob ich selbst das Ganze durchführen kann, da andere Geschäfte mich nötigen abzubrechen« (W. VIII, S. 295).

Was GAUSS damals über seine Spekulationen niedergeschrieben hat, ist aus dem Nachlass W. VIII, S. 341—344 abgedruckt. Die ihm eigentümliche Methode war wieder die Benutzung komplexer Grössen; mittels dieses Verfahrens hatte er schon etwa seit 1831 begonnen, die Kegelschnitte zu behandeln (W. VIII, S. 339—340).

GAUSS hat die abgebrochene Arbeit nicht wieder aufgenommen, nicht aus Mangel an Zeit, sondern weil ihm zufällig ein Buch in die Hände fiel, worin, wie er am 15. Mai 1843 an SCHUMACHER schreibt, »die Quintessenz der Lehre von den Kegelschnitten in nucem gebracht ist«. Es war der schon 1827 erschienene *Barycentrische Calcul* von MÖBIUS, ein Buch, das er, als es ihm 1828 vom Verfasser zugegangen war, »ohne viele Erwartung davon zu haben, zunächst auf die Seite gelegt und später völlig vergessen hatte«, das aber, wie er jetzt »mit grossem Vergnügen« fand, »auf dem leichtesten Wege zur Auflösung aller dahin gehörigen Aufgaben führt« (W. VIII, S. 297)[1].

Dass GAUSS sich in das Buch von MÖBIUS vertieft hat, bezeugen auch die aus dem Nachlass abgedruckten Notizen über das Pentagramma mirificum (Fragment [11], W. VIII, S. 109—111) und über den Resultantencalcul (W. VIII, S. 298).

Wenn GAUSS im *Barycentrischen Calcul* die Quintessenz der Lehre von den Kegelschnitten erblickt hat, so wird man daraus schliessen dürfen, dass ihm die Untersuchungen PONCELETS, STEINERS und PLÜCKERS fremd geblieben waren. Um seine Stellung zur neueren Geometrie zu bezeichnen, genügt es daher nicht zu sagen, er habe die analytischen Methoden bevorzugt, man muss vielmehr hinzufügen, dass er kein inneres Verhältnis zu den Auffassungen gewonnen hat, die der projektiven Geometrie eigentümlich sind.

Ebenfalls in das Jahr 1843 sind Auszüge zu setzen, die sich GAUSS aus zwei in den Pariser Comptes rendus vom 24. April 1843 erschienenen Noten

1) Vgl. auch den Brief an SCHUMACHER vom 19. Mai 1843, Br. G.-SCH. IV, S. 151.

Cauchys gemacht hat. Sie stehen teils auf einer Notiztafel, die Gauss im April 1840 von Schumacher zum Geschenk erhalten hatte (Br. G.-Sch. III, S. 369) und die sich gegenwärtig im Besitz seines Enkels, Herrn C. Gauss in Hameln, befindet, teils in dem Handbuch 19 Be, S. 254—257; auch die Notiz über die Kreisschnitte, ebenda S. 253, hängt damit zusammen. Diese Auszüge verdienen um so mehr Beachtung, als die im Nachlass vorhandenen Notizen über Abhandlungen, die Gauss gelesen hatte, lediglich aus der Göttinger Studienzeit (1795—1798) stammen; aus der späteren Zeit sind uns jedenfalls keine Aufzeichnungen dieser Art erhalten, und auch in den Handbüchern fehlen sie, abgesehen von dem soeben erwähnten Ausnahmefall. Gauss muss also in den Sätzen von Cauchy etwas Besonderes gefunden haben, vielleicht Berührungspunkte mit eigenen Untersuchungen.

In der ersten Note[1]) betrachtet Cauchy eine ganze rationale Funktion der rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes der Ebene und zeigt, dass man ihren Werten eine einfache geometrische Bedeutung beilegen kann; hiervon werden Anwendungen auf die Kegelschnitte gemacht.

Die zweite Note[2]) enthält eine analytische Lösung der Aufgabe von Amyot, eine Fläche zweiter Ordnung als geometrischen Ort der Punkte darzustellen, bei denen das Produkt der Entfernungen von zwei festen Ebenen zu dem Quadrat der Entfernung von einem festen Punkte in einem gegebenen Verhältnis steht[3]). Cauchy zeigt, dass die Aufgabe, abgesehen von der Ausziehung gewisser Quadratwurzeln, auf eine Gleichung dritten Grades führt, die mit der bekannten Gleichung für die reziproken Quadrate der Hauptachsen übereinstimmt, ein Ergebnis, das man bei Heranziehung der Kreisschnitte leicht bestätigen wird.

Zu der Gleichung dritten Grades bemerkt Gauss: »Dies Resultat ist ganz identisch mit meinem eigenen, vor 24 Jahren publizierten, was auch auf einem

---

1) A. L. Cauchy, *Mémoire sur la synthèse algébrique*, Comptes rendus, t. 16, Paris 1843, S. 867, Oeuvres, 1. série, t. 7, Paris 1892, S. 382.

2) A. L. Cauchy, *Notes annexées au Rapport sur le Mémoire de M. Amyot*, Comptes rendus, ebenda, S. 885, Oeuvres, ebenda, S. 377.

3) Ein ausführlicher Bericht über die der Pariser Akademie eingereichte Abhandlung Amyots: *Nouvelle méthode de génération et de discussion des surfaces du second ordre* von Cauchy steht Comptes rendus ebenda, S. 783, Oeuvres, ebenda, S. 325; die Abhandlung Amyots ist abgedruckt in Liouvilles Journal, 2. série, t. 8, 1843, S. 163.

besonderen Blatte steht«, und fügt die Buchstabenvertauschung hinzu, die CAUCHYS Gleichung in die seinige überführe. Die Abhandlung, auf die er sich bezieht, ist die 1818 erschienene *Determinatio attractionis, quam . . . exerceret planeta . . .*, und zwar handelt es sich um die Formel [3] (W. III, S. 341). Das besondere Blatt ist die Seite 114 des Handbuchs 19 Be; es enthält die kubische Gleichung für die reziproken Quadrate der Hauptachsen genau in der von GAUSS angegebenen Bezeichnung. Damit stimmt, dass eine Notiz auf S. 103 des Handbuchs das Datum des 20. Februar 1817 trägt. In anderer Bezeichnungsweise findet sich die kubische Gleichung auf S. 166 desselben Handbuches; diese etwa aus dem Jahre 1831 stammende Notiz ist W. II, S. 307 abgedruckt. In geschichtlicher Beziehung sei noch bemerkt, dass die kubische Gleichung schon 1812 von HACHETTE und PETIT[1]) angegeben war und dass CAUCHY sie 1826 abgeleitet hatte[2]).

27.

Sphärische Trigonometrie.

DE GUA[3]) und LAGRANGE[4]) hatten gezeigt, dass die Kosinusformel zum Aufbau der ganzen sphärischen Trigonometrie ausreicht; ihre Ableitungen gelten indessen nur für Bogen, die nicht grösser als 90^0 sind. In dem Zusatz VII (1810) zu CARNOTS *Geometrie der Stellung* (2. Teil, S. 373, W. IV, S. 401) hat GAUSS diese Lücke ausgefüllt und Bogen bis zu 180^0 zugelassen, wie sie in der Praxis tatsächlich vorkommen[5]). Aber schon in der *Theoria motus corporum coelestium*, die 1809 erschienen war, hatte er im Art. 54 auf die allgemeinste Auffassung des sphärischen Dreiecks hingewiesen, bei der weder Seiten noch Winkel irgend welchen Beschränkungen unterworfen seien; die ausführlichere Darstellung, die er in Aussicht stellte, ist aber weder veröffentlicht

---

1) HACHETTE und PETIT, *De l'équation qui a pour racines les carrés des demiaxes principaux d'une surface du second ordre,* Correspondance sur l'école polytechnique, t. 2, 1812, S. 324, 327.

2) A. L. CAUCHY, *Leçons sur les applications du calcul infinitésimal à la géométrie,* t. I, Paris 1826, S. 240; Oeuvres, 2. série, t. 5, S. 250.

3) J. P. DE GUA, *Trigonométrie sphérique,* Mém. de l'Acad., année 1783, Paris 1786, S. 291.

4) J. L. LAGRANGE, *Solution de quelques problèmes relatifs aux triangles sphériques,* Journal de l'école polytechnique, cahier 6, 1798, S. 270, Oeuvres, t. 7, S. 329.

5) Für die rechtwinkligen Dreiecke hatte schon KLÜGEL diese Erweiterung vorgenommen, *Analytische Trigonometrie,* Braunschweig 1770.

worden, noch hat sich im Nachlass etwas darüber gefunden. Später hat MÖBIUS, auch hier in den Spuren von GAUSS wandelnd, die Untersuchung für Bogen und Winkel durchgeführt, die bis 360^0 reichen[1], zur vollen Allgemeinheit ist aber erst STUDY (1893) gelangt[2].

Die vier Fundamentalformeln der sphärischen Trigonometrie lauten in der Gestalt, die GAUSS sich zu seinem Gebrauch aufgezeichnet hatte und die er für die angemessenste hielt (Brief an SCHUMACHER vom 26. September 1844, Br. G.-SCH., IV, S. 310):

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$
$$\sin a \sin B = \sin b \sin A,$$
$$\cos A \cos c = \operatorname{cotang} b \sin c - \operatorname{cotang} B \sin A,$$
$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a.$$

Sie sind nebst den zugehörigen, ebenfalls von GAUSS angegebenen Differentialformeln in die Sammlung von Hülfstafeln aufgenommen worden, die WARNSTORFF 1845 als neue Ausgabe der von SCHUMACHER 1822 veröffentlichten Tafeln herausgegeben hat[3]. Man findet hier auch eine Anweisung, die dritte Formel dem Gedächtnis einzuprägen, die GAUSS, wie WITTSTEIN berichtet[4], seinen Zuhörern mitzuteilen pflegte.

Im Art. 54 der *Theoria motus* (1809) hatte GAUSS ohne Beweis vier Gleichungen zwischen den sechs Stücken eines sphärischen Dreiecks angegeben, die er als nützlich für die Auflösung eines solchen Dreiecks bezeichnete, wenn eine Seite und die anliegenden Winkel gegeben sind. Gefunden hatte er diese Gleichungen, wie es scheint, auf dem Umwege von Betrachtungen über die Frage, wie man die Gleichungen zwischen den Stücken eines sphärischen Dreiecks auf Gleichungen zwischen den Stücken eines ebenen Dreiecks zurück-

---

1) A. F. MÖBIUS, *Über eine neue Behandlungsweise der analytischen Sphärik*, Abhandlungen bei Begründung der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, herausgegeben von der JABLONOWSKIschen Gesellschaft d. W., Leipzig 1846, S. 45, Werke II, S. 1.

2) E. STUDY, *Sphärische Trigonometrie, orthogonale Substitutionen und elliptische Funktionen*, Leipziger Abhandlungen, Bd. 21, 1893.

3) G. H. L. WARNSTORFF, *Sammlung von Hülfstafeln*, Altona 1845, S. 132. Die Formeln werden dort nicht ausdrücklich als von GAUSS herrührend bezeichnet, während das bei den anderen Beiträgen von GAUSS geschehen ist, z. B. bei den Tafeln für barometrisches Höhenmessen; vgl. W. IX, S. 456.

4) TH. WITTSTEIN, *Lehrbuch der Elementar-Mathematik*, 2. Band, 2. Abteilung, Hannover 1862, S. 146: die betreffende Stelle ist abgedruckt W. X 1, S. 457.

führen könne (W. IV, S. 404). Später hat er in dem Brief an GERLING vom 18. Februar 1815 eine einfache Herleitung gegeben (W. VIII, S. 289); dabei findet man zugleich die richtigen Vorzeichen der linken Seiten, die, wie GAUSS bereits in der *Theoria motus* bemerkt hatte, bei Ausdehnung der Stücke über 180^0 besonders bestimmt werden müssen.

DELAMBRE hat in der ausführlichen Besprechung der *Theoria motus*, die er in der *Connaissance des temps pour l'an* 1812, Paris, juillet 1810, veröffentlicht hat, darauf hingewiesen (S. 451), dass er jene Formeln schon im Jahre 1807 bekannt gemacht habe[1]. Er fügt hinzu: »Quand j'eus trouvé ces formules, j'en cherchai des applications qui pouvaient être vraiment utiles; n'en voyant aucune je les donnai simplement comme curieuses«, und wiederholt dreimal, dass er ihnen die NEPERschen Analogien vorziehe (S. 364, 370, 385). Eine Erfahrung von mehr als hundert Jahren hat gezeigt, dass die »DELAMBREschen Gleichungen« für die Auflösung der sphärischen Dreiecke wahrhaft nützlich sind[2]; im Besonderen werden sie in der Geodäsie bei der Berechnung der SOLDNERschen rechtwinklig-sphärischen Koordinaten angewandt[3].

Für den LEGENDREschen Satz von der Zurückführung eines kleinen sphärischen Dreiecks auf ein ebenes Dreieck mit eben so langen Seiten sei auf den fünften Abschnitt dieses Aufsatzes (Nr. 30) verwiesen. Hier möge nur noch die zierliche Lösung der Aufgabe erwähnt werden, den Ort der Spitze eines sphärischen Dreiecks auf gegebener Grundseite und mit gegebenem Inhalt zu finden, die GAUSS in dem Briefe an SCHUMACHER vom 6. Januar 1842 entwickelt hat (W. VIII, S. 293). Sie gehört in die Zeit der »geometrischen Nachblüte«, aus der die Mehrzahl der Untersuchungen herrührt, über die in diesem Abschnitt berichtet worden ist.

1) *Connaissance des temps pour l'an* 1809, Paris avril 1807, S. 445. Auch DELAMBRE hat die Formeln ohne Beweis mitgeteilt. Ein Beweis ist zuerst von K. B. MOLLWEIDE gegeben worden, der die Formeln selbständig gefunden hat, *Zusätze zur ebenen und sphärischen Trigonometrie*, Monatliche Correspondenz, Bd. 18, 1808, S. 394.

2) Vgl. E. HAMMER, *Lehr- und Handbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie*, 4. Aufl., Stuttgart 1916, S. 479, 481.

3) Vgl. W. JORDAN, *Handbuch der Vermessungskunde*, Bd. III, 4. Aufl., Stuttgart 1896, S. 259.

Abschnitt V.

Die allgemeine Lehre von den krummen Flächen.

28.

Entwicklung der Grundgedanken bis zum Jahre 1816.

Ähnlich wie im 17. Jahrhundert aus den Bedürfnissen der Mechanik die Infinitesimalrechnung hervorgegangen ist, verdankt im 19. Jahrhundert die allgemeine Lehre von den krummen Flächen ihre Entstehung der Geodäsie. In beiden Fällen hat sich aus der angewandten Mathematik ein neuer, lebensfähiger Zweig der reinen Mathematik losgelöst, hat ein selbständiges Dasein gewonnen und sich zu einem ausgedehnten, reich gegliederten Inbegriff theoretischer Untersuchungen ausgestaltet.

Die Frage nach der Gestalt und der Grösse der Erde hatte die Astronomen, Physiker und Mathematiker während des 18. Jahrhunderts lebhaft beschäftigt, ja die grossen Gradmessungen in Lappland (1736—1737) und Peru (1735—1741) hatten die Aufmerksamkeit aller Gebildeten erregt. Handelte es sich hier um einen rein wissenschaftlichen Gegenstand, so gewann die Geodäsie bald auch praktische Wichtigkeit. Die Einführung des metrischen Systems veranlasste die Gradmessung von Méchain und Delambre zwischen Dünkirchen und Barcelona (1792—1798). Dazu kamen die Anforderungen der Heeresführung und der Steuerverwaltung, die eine planmässige Triangulierung der Staaten nötig machten. Hand in Hand mit der Ausdehnung der geodätischen Messungen ging die Ausbildung und Verfeinerung der mathematischen Hilfsmittel.

Im Jahre 1816 hatte Schumacher, seit 1815 Leiter der Sternwarte zu Altona, vom König Friedrich VI. von Dänemark den Auftrag erhalten, Gradmessungen im Meridian von Skagen bis Lauenburg und im Parallel von Kopenhagen bis zur Westküste Jütlands als Grundlage für eine spätere Triangulierung auszuführen. Als Schumacher sogleich bei Gauss anfragte, ob es sich ermöglichen liesse, den Meridianbogen durch das Königreich Hannover fortzusetzen und so den Anschluss an die Dreiecke des preussischen General-

stabs zu gewinnen, antwortete dieser am 5. Juli 1816 mit einer bei ihm ungewöhnlichen Wärme des Tones:

»Vor allen Dingen meinen herzlichen Glückwunsch zu der herrlichen, grossen Unternehmung, die Sie mir in Ihrem letzten Briefe ankündigen. Diese Gradmessung in den k. dänischen Staaten wird uns, an sich schon, über die Gestalt der Erde schöne Aufschlüsse geben. Ich zweifle indessen gar nicht, dass es in Zukunft möglich zu machen sein wird, Ihre Messungen durch das Königreich Hannover südlich fortzusetzen. . . . Über die Art, die gemessenen Dreiecke im Kalkül zu behandeln, habe ich mir eine Methode entworfen, die aber für einen Brief viel zu weitläufig würde. In Zukunft . . . werde ich mit Ihnen darüber ausführlich konferieren: ja ich erbiete mich, die Berechnung der Hauptdreiecke selbst auf mich zu nehmen« (W. IX, S. 345).

Dass GAUSS Freude an geodätischen Messungen und Rechnungen hatte, lässt sich bis in die Frühzeit hinein verfolgen. Zum Beispiel beteiligte er sich im August und September 1803 an den Beobachtungen der Pulversignale, die v. ZACH auf dem Brocken veranstaltete, und lieferte um dieselbe Zeit Berechnungen für die von dem preussischen Generalmajor v. LECOQ vorgenommene trigonometrische Aufnahme Westfalens[1]).

Als GAUSS im September 1812 v. ZACH auf der Sternwarte Seeberg bei Gotha besuchte, fand er (T. Nr. 142) seine Auflösung der Aufgabe, die Anziehung eines elliptischen Sphäroids zu bestimmen, die er 1813 veröffentlicht hat (W. V, S. 1). In der Selbstanzeige sagt er, die Auflösung sei so ausführlich dargestellt, um sie »auch weniger geübten Lesern verständlich zu machen, denen diese für die Gestalt der Erde so interessanten Untersuchungen bisher ganz unzugänglich waren« (W. V, S. 217).

Dass GAUSS sich in der Zeit zwischen 1812 und 1816 mit der Lehre von den kürzesten Linien auf dem elliptischen Sphäroid beschäftigt hat, zeigt schon der vorhin angeführte Brief an SCHUMACHER vom 5. Juli 1816. Dazu kommen die Briefe an OLBERS vom 13. Januar 1821 (W. IX, S. 367) und an BESSEL vom 11. März 1821 und 15. November 1822 (Br. G.-BESSEL, S. 380 und 410), in denen er bemerkt, er habe seine Theorie der Behandlung der Messungen

1) Näheres hierüber findet man in dem Aufsatz von A. GALLE über die geodätischen Arbeiten von GAUSS, Werke XI 2, Abh. 3.

auf der Oberfläche der Erde schon seit geraumer Zeit entwickelt; seine Andeutungen lassen erkennen, dass er damit das in den artt. 11 und 16 der *Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie* (W. IV, S. 274 und 286) dargelegte Verfahren meinte. Auch erklärt er in der Selbstanzeige der zweiten Abhandlung über Gegenstände der höheren Geodäsie vom 28. September 1846: »Der Verfasser, welcher alle diese Untersuchungen schon vor mehr als dreissig Jahren zu seinem Privatgebrauch durchgeführt und nur bisher zur Veröffentlichung noch keine Veranlassung gefunden hatte ...« (W. IV, S. 353).

Gauss hat jedoch damals noch mehr besessen. Er kannte zunächst die in dem Brief an Schumacher vom 21. November 1825 (W. VIII, S. 401) erwähnte Verallgemeinerung des Legendreschen Lehrsatzes von der Zurückführung eines kleinen sphärischen Dreiecks auf ein ebenes Dreieck mit eben so langen Seiten. Ferner wird schon in § 10 der *Theoria attractionis corporum sphaeroidicorum ellipticorum* (1813) auf die Lehre von der Abbildung der krummen Flächen hingewiesen (W. V, S. 14). Im Frühjahr 1816 hatte Gauss als Preisaufgabe für die neue, von v. Lindenau und Bohnenberger begründete »Zeitschrift für Astronomie und verwandte Wissenschaften« die Aufgabe vorgeschlagen, zwei krumme Flächen mit Erhaltung der Ähnlichkeit in den kleinsten Teilen auf einander abzubilden[1]. Der Brief an Schumacher vom 5. Juli 1816 (W. VIII, S. 370) beweist, dass er ihre Lösung besass; übrigens hat er diese in einer gleichzeitig niedergeschriebenen Aufzeichnung angegeben (W. VIII, S. 371). Unmittelbar darauf folgt (Handbuch 16 Bb, S. 71) das »schöne Theorem«, dass einander entsprechende Stücke von Biegungsflächen, wenn sie auf die Himmelskugel mittels paralleler Normalen abgebildet werden, auf der Kugel Flächenstücke gleichen Inhalts ergeben (W. VIII, S. 372). Hierin liegt die Erhaltung der Gesamtkrümmung eines Flächenstückes gegenüber Biegungen. Aber auch der Begriff, freilich nicht der Name, des Krümmungsmasses lässt sich bis in die Zeit zwischen 1813 und 1816 zurückverfolgen, denn eine Notiz aus dieser Zeit bringt den Satz, dass bei jener Abbildung auf die Kugel vom Halbmesser Eins das Verhältnis des Bildes eines Flächenelementes zu diesem selbst gleich dem Produkte der Hauptkrümmungen ist (W. VIII, S. 367).

---

1) Hierauf beziehen sich die Briefe von v. Lindenau an Gauss vom 18. und 28. Juni 1816 (Briefe im Gauss-Archiv); die Briefe von Gauss an v. Lindenau scheinen vernichtet worden zu sein, vgl. Br. G.-Bolyai, S. 156 (Brief von Sartorius v. Waltershausen an W. Bolyai vom 12. August 1856).

Zusammenfassend und in einigen Punkten ergänzend kann man die Ergebnisse aus der allgemeinen Lehre von den krummen Flächen, zu denen Gauss bis zum Jahre 1816 gelangt war, etwa folgendermassen darstellen:

1. Auffassung der kartesischen Koordinaten eines Punktes einer krummen Fläche als Funktionen von zwei Hilfsgrössen (*Theoria attractionis*. § 10. W. V. S. 14), Abbildung krummer Flächen (ebenda), Abbildung mittels paralleler Normalen auf die Kugel vom Halbmesser Eins (W. VIII, S. 367[1]), konforme Abbildung zweier krummer Flächen auf einander (W. VIII, S. 370).

2. Abwicklung oder Biegung krummer Flächen als besonderer Fall der Abbildung; Begriff der Gesamtkrümmung eines Flächenstücks, Begriff des einem Punkte der Fläche zugeordneten Krümmungsmasses, Erhaltung des Krümmungsmasses gegenüber Biegungen (W. VIII, S. 376, 372).

3. Die Haupteigenschaften der kürzesten Linien auf krummen Flächen, genauere Untersuchung für das elliptische Sphäroid (W. IX, S. 72—77), Verallgemeinerung des Legendreschen Theorems auf beliebige Flächen (W. VIII, S. 401).

Man erkennt, dass bereits in der Zeit zwischen 1812 und 1816 die Fundamente für das Gebäude der *Disquisitiones generales* gelegt worden sind. Diese Leistung tritt jedoch erst in das rechte Licht, wenn man sich die gesamte Tätigkeit von Gauss während jenes Zeitraumes vergegenwärtigt.

In der reinen Mathematik hatte das Jahr 1812 mit der Veröffentlichung des ersten Teiles der Untersuchungen über die hypergeometrische Reihe begonnen (W. III, S. 123). Im Dezember 1815 und im Januar 1816 wurden der Göttinger Gesellschaft die beiden neuen Beweise für den Fundamentalsatz der Algebra vorgelegt (W. III, S. 31 und 57). Für die Zahlentheorie ist die im Februar 1817 vorgelegte Abhandlung über die quadratischen Reste zu nennen, die den fünften und den sechsten Beweis für das Reziprozitätsgesetz enthält (W. II, S. 47); auch die Lehre von den biquadratischen Resten ist damals gefördert worden, wie aus den Briefen an Bessel vom 23. Dezember 1816 (W. X 1, S. 76) und an Dirichlet vom 30. Mai 1828 (W. II, S. 516) hervorgeht. Aus der Geometrie sind die Untersuchungen zur Flächentheorie bereits erwähnt worden. Dazu kommen aus dem Jahre 1816 zwei Be-

1) Die Beziehung der Richtungen im Raume auf die Punkte der Einheitskugel findet sich schon in der Scheda Ac, Varia, begonnen Nov. 1799, S. 3.

sprechungen von Versuchen, das Parallelenaxiom zu beweisen (W. IV. S. 363. VIII, S. 170). Wie wir gesehen haben, wusste GAUSS hier mehr, als er öffentlich auszusprechen für gut fand; er war gerade damals zur nichteuklidischen Trigonometrie durchgedrungen (W. VIII, S. 176).

Die Abhandlung über die mechanische Quadratur vom 16. September 1814 bildet den Übergang zur angewandten Mathematik (W. III, S. 163). In diese selbst gehört die Bestimmung der Anziehung der homogenen elliptischen Sphäroide vom 18. März 1813 (W. V, S. 1). Im Anschluss an die Beobachtungen des Kometen vom Jahre 1813 wurde die *Theoria motus* nach der Seite der parabolischen Bahnen ergänzt; die betreffende Abhandlung ist vorgelegt am 10. September 1813 (W. VI, S. 25). Ferner sind anzuführen zahlreiche, meistens in den Göttinger Anzeigen veröffentlichte astronomische Rechnungen und Beobachtungen (W. VI, S. 354—392). Die Untersuchungen aber, denen GAUSS während der Zeit von 1810 bis 1818 wohl den grössten Teil seiner Zeit und Kraft gewidmet hat, die Störungen der Pallas, sind nicht abgeschlossen worden; erst im Jahre 1906 hat BRENDEL die Bruchstücke herausgegeben (W. VII, S. 439—600).

»In jener Zeit« schreibt SARTORIUS VON WALTERSHAUSEN (S. 50), »schien ihm keine Anstrengung des Geistes und des Körpers zu gross. um eine Reihe von Arbeiten durchzuführen, dazu bestimmt, die Wissenschaft des 19. Jahrhunderts zu reformieren und ihr Fundamente zu unterbreiten, deren Festigkeit erst von künftigen Geschlechtern anerkannt und gewürdigt werden wird«.

29.

Die Kopenhagener Preisschrift (1822).

So lebhaft der Anteil war, den GAUSS an den Gradmessungen nahm, so warm er die Nachricht von SCHUMACHERS Unternehmen begrüsst hatte, so hat er sich doch über den Vorschlag, den Meridian durch Hannover fortzusetzen, zurückhaltend geäussert. »In diesem Augenblick«, schreibt er am 5. Juli 1816, »kann ich zwar solchen Wunsch in Hannover noch nicht in Anregung bringen, da erst die Astronomie selbst noch so grosser Unterstützung bedarf: allein ich bin überzeugt, dass demnächst unsere Regierung, die auch die Wissenschaften gern unterstützt, dem glorreichen Beispiel Ihres trefflichen Königs folgen werde« (W. IX, S. 345). In der Tat näherte sich zu dieser Zeit der lange

hingezogene Neubau der Göttinger Sternwarte der Vollendung, und GAUSS war im April und Mai 1816 in München gewesen, um mit REICHENBACH und STEINHEIL wegen der neu zu beschaffenden Messwerkzeuge zu verhandeln. Im Herbst des Jahres hat er dann seinen Einzug in die Räume gehalten, die er fast 40 Jahre innehaben sollte.

GAEDE hat auf Grund der Akten dargelegt, wie der »welterfahrene und geschäftsgewandte« SCHUMACHER (Br. G.-SCH. I, S. 190) in jahrelangen Verhandlungen die Schwierigkeiten überwand, die sich seinem zum »Sollizitieren« wenig geneigten und geeigneten Freunde (Br. G.-SCH. I. S. 142) entgegenstellten, bis dieser endlich durch die Kabinettsordre Georgs IV., Königs von England und Hannover, vom 9. Mai 1820 den Auftrag zur Ausführung der Gradmessung erhielt[1]). Die Messungen im Felde haben fünf Arbeitsjahre, 1821 bis 1825, erfordert, und im Frühjahr 1827 folgte noch die astronomische Bestimmung des Breitenunterschiedes der Sternwarten zu Göttingen und zu Altona. Nunmehr wurde durch die Kabinettsordre vom 25. März 1828 die Triangulation des ganzen Königreichs Hannover befohlen, und GAUSS am 14. April vom Ministerium mit der Leitung beauftragt. Wenn er auch an den Aufnahmen im Feld nicht mehr teilnahm, so erwuchs ihm doch aus den Messungsergebnissen eine grosse und öde Rechenarbeit, die erst mit dem Jahre 1848 zum Abschluss gekommen ist. Wiederholt hat GAUSS beklagt, wie sehr er dadurch in seinen wissenschaftlichen Untersuchungen gehemmt werde. »Gewiss ist, dass wenn meine Lage immer die nämliche bleibt, ich den grössern Teil meiner früheren theoretischen Arbeiten, denen noch, der einen mehr, der andern weniger an der Vollendung fehlt, und die von solcher Art sind, dass Vollendung sich nicht erzwingen lässt, wenn man eben will, mit ins Grab nehmen werde. Denn etwas Unvollendetes kann und mag ich einmal nicht geben« (Brief an BESSEL vom 15. November 1822, Br. G.-BESSEL S. 410). Nur wer sich in eine solche Lage und Stimmung zu versetzen vermag, wird verstehen, wie es gekommen ist, dass GAUSS nur einen Teil seiner umfangreichen Untersuchungen über die allgemeine Lehre von den krummen Flächen ausgearbeitet und bekanntgegeben hat.

Wir verdanken es wiederum SCHUMACHER, dass GAUSS mit der Veröffent-

1) Vgl. GAEDE, *Beiträge zur Kenntnis von Gauss' praktisch-geodätischen Arbeiten*, Zeitschrift für Vermessungswesen, Bd. 14, 1885; auch als besondere Schrift, Karlsruhe 1885 erschienen.

lichung seiner Entdeckungen einen Anfang machte. Wie schon erwähnt wurde, hatte GAUSS in dem Briefe vom 5. Juli 1816 von einer Preisfrage erzählt, die er für die neue astronomische Zeitschrift vorgeschlagen hatte, die aber nicht gewählt worden war. »Mir war eine interessante Aufgabe eingefallen«, schreibt er, »nämlich: allgemein eine gegebene Fläche so auf einer andern (gegebenen) zu projizieren (abzubilden), dass das Bild dem Original in den kleinsten Teilen ähnlich werde. Ein spezieller Fall ist, wenn die erste Fläche eine Kugel, die zweite eine Ebene ist. Hier sind die stereographische und die merkatorische Projektionen partikuläre Auflösungen. Man will aber die allgemeine Auflösung, worunter alle partikulären begriffen sind, für jede Arten von Flächen. Es soll darüber in dem Journal philomathique bereits von MONGE und POINSOT gearbeitet sein (wie BURCKHARDT an LINDENAU geschrieben hat), allein da ich nicht genau weiss wo, so habe ich noch nicht nachsuchen können und weiss daher nicht, ob jener Herren Auflösungen ganz meiner Idee entsprechen und die Sache erschöpfen« (W. VIII, S. 370)[1].

SCHUMACHER benutzte die erste sich ihm darbietende Gelegenheit und veranlasste, dass die Kopenhagener Sozietät der Wissenschaften im Jahre 1820 für 1821 die Preisaufgabe stellte, »generaliter superficiem datam in alia superficie ita exprimere, ut partes minimae imaginis archetypo fiant similes«. Nachdem keine Abhandlung eingelaufen war, wurde die Aufgabe für 1822 erneuert. Als SCHUMACHER am 4. Juni 1822 GAUSS davon benachrichtigte (Br. G.-SCH. I, S. 267), antwortete dieser am 10. Juni: »Es tut mir leid, die Wiederholung Ihrer Preisfrage erst jetzt zu erfahren ... aber so lange die praktischen Messungsarbeiten dieses Jahres dauern, kann ich natürlich an eine subtile theoretische Ausarbeitung gar nicht denken« (Br. G.-SCH. I, S. 270). Am 25. November d. J. fragte er bei seinem Freunde an, bis wann die Preisarbeit eingesendet werden müsse (Br. G.-SCH. I, S. 293), und nachdem dieser erwiedert hatte, bis Ende des Jahres, schickte ihm GAUSS am 11. Dezember 1825 seine Ausarbeitung (Br. G.-SCH. I, S. 297). Am 23. Juli 1823 konnte GAUSS melden,

1) Weder in dem Bulletin de la société philomathique noch in den sonstigen Veröffentlichungen von MONGE und POINSOT hat sich eine auf die konforme Abbildung bezügliche Stelle finden lassen. (Vielleicht hat BURCKHARDT an POISSONS Note: *Sur les surfaces élastiques* gedacht, die im Bulletin, année 1814, S. 47 steht und in deren erstem Teil biegsame, unausdehnbare Flächen betrachtet werden. Die Note ist ein Auszug aus einer Abhandlung, die POISSON am 1. August 1814 gelesen hatte und die in dem zweiten Teil der Mémoires de l'Institut, année 1812, Paris 1816, S. 167 erschienen ist.

dass er den Preis erhalten habe (Br. G.-Sch. I, S. 317). Da die Kopenhagener Gesellschaft sich mit dem Druck der gekrönten Arbeiten nicht befasste, ist die Abhandlung erst 1825 im dritten und letzten Hefte der von Schumacher herausgegebenen Astronomischen Abhandlungen erschienen (W. IV, S. 189; vgl. auch Br. G.-Sch. II, S. 5—7, 17, 22).

Der Begriff der Abbildung steht im Mittelpunkt der Gaussschen Lehre von den krummen Flächen. »Sie haben ganz Recht«, schreibt Gauss am 11. Dezember 1825 an Hansen, »dass bei allen Kartenprojektionen die Ähnlichkeit der kleinsten Teile die wesentliche Bedingung ist, die man nur in ganz speziellen Fällen und Bedürfnissen hintansetzen darf. Es wäre wohl zweckmässig, den Darstellungen, die jener Bedingung Genüge leisten, einen eigenen Namen zu geben. Inzwischen, allgemein betrachtet, ist sie doch nur eine Unterabteilung des Generalbegriffs von Darstellung einer Fläche auf einer andern, die in der Tat gar nichts weiter enthält, als dass jedem Punkt der einen nach irgend einem stetigen Gesetz ein Punkt der andern korrespondieren soll. Es mag wohl etwas Anstrengung kosten, sich zu diesem allgemeinen Begriff zu erheben; dann aber fühlt man sich auch wirklich auf einem höhern Standpunkt, wo alles in vergrösserter Klarheit erscheint. . . . Man kann leicht zeigen, dass, wie allgemein dieser Begriff sei, doch allemal jeder unendlich kleine Teil (mit Ausnahme der Stellen an singulären Punkten oder Linien) wahrhaft perspektivisch dargestellt wird, entweder mit völliger Ähnlichkeit, so wie perspektivische Darstellung auf paralleler Tafel, oder mit halber Ähnlichkeit, in der in einem Sinn eine Verkürzung statt hat« (Brief im Gauss-Archiv).

Für die Abbildungen, bei denen völlige Ähnlichkeit stattfindet, hat Gauss im Jahre 1843 das Beiwort konform vorgeschlagen (W. IV, S. 262); für den besonderen Fall der Abbildung des Erdsphäroids auf die Ebene hatte schon Schubert (1789) von einer projectio conformis gesprochen[1]. Den Satz, dass eine beliebige stetige Abbildung, von singulären Stellen abgesehen, im Unendlichkleinen projektiv ist, hat wohl Tissot (1859) zuerst bekannt gemacht[2].

Die konforme Abbildung hat eine Vorgeschichte. Schon die Griechen

1) F. Th. Schubert, *De projectione sphaeroidis ellipticae geographica*, Nova acta acad. sc. Petrop., t. 5 ad annum 1787, Petersburg 1789, S. 130.

2) A. Tissot, *Sur les cartes géographiques*, C. R. t. 49, Paris 1859, S. 673.

kannten und benutzten die stereographische Projektion der Kugel auf die Ebene, und GERHARD MERCATOR (1512—1594) hatte die nach ihm benannte Abbildung hinzugefügt. LAMBERT (1772) war dann zu dem allgemeinen Begriff solcher Abbildungen der Kugel auf eine Ebene gelangt, bei denen die Ähnlichkeit in den kleinsten Teilen erhalten bleibt, und hatte verschiedene neue Projektionen dieser Art angegeben, die noch heute bei der Herstellung geographischer Karten verwendet werden [1]).

LAMBERT hat in seiner Abhandlung auch die Formeln für die allgemeine konforme Abbildung einer Kugel auf eine Ebene mitgeteilt, die er LAGRANGE verdankte. Dieser geht aus von der bekannten Form für das Quadrat des Linienelementes der Kugel

$$(1) \qquad ds^2 = dp^2 + \cos^2 p \,.\, d\lambda^2,$$

die er durch die Substitution

$$(2) \qquad \mu = \log \operatorname{tang} (45^0 + \tfrac{1}{2} p)$$

auf die Form

$$(3) \qquad ds^2 = \cos^2 p \,(d\lambda^2 + d\mu^2)$$

bringt. Die Forderung, dass die Kugel konform auf die xy-Ebene abgebildet werden soll, führt nunmehr zu der Gleichung

$$(4) \qquad dx^2 + dy^2 = \varphi(\lambda, \mu)(d\lambda^2 + d\mu^2),$$

die, wie die von LAGRANGE bei Untersuchungen aus der Zahlentheorie häufig benutzte Identität

$$(5) \qquad (A^2 + B^2)(C^2 + D^2) = (AD - BC)^2 + (AC + BD)^2$$

zeigt, erfüllt ist, wenn man

$$(6) \qquad dx = n\,d\lambda - m\,d\mu, \quad dy = m\,d\lambda + n\,d\mu$$

setzt, und es ist daher, wie das D'ALEMBERTsche Verfahren der linearen Verbindungen [2]) erkennen lässt, $x + \sqrt{-1}\,.\,y$ eine Funktion von $\lambda + \sqrt{-1}\,.\,\mu$ und

1) J. H. LAMBERT, *Anmerkungen und Zusätze zur Entwerfung der Land- und Himmelscharten,* erschienen in den *Beyträgen zum Gebrauch der Mathematik,* 3. Teil, Berlin 1772, S. 195—199.

2) Vgl. P. STÄCKEL, *Beiträge zur Geschichte der Funktionentheorie im 18. Jahrhundert,* Bibliotheca mathem. (3), 2, 1901, S. 113 und 119.

gleichzeitig $x - \sqrt{-1} . y$ eine Funktion von $\lambda - \sqrt{-1} . \mu$. Hieraus ergeben sich endlich x und y als Funktionen von λ und μ, die der Gleichung (4) genügen.

Bald darauf hat EULER in einer am 4. September 1775 der Petersburger Akademie vorgelegten, 1778 veröffentlichten Abhandlung denselben Gegenstand behandelt[1]. Er vermeidet den Kunstgriff, die Identität (5) heranzuziehen, und gewinnt die Gleichungen (6) oder doch mit ihnen gleichbedeutende Gleichungen unmittelbar aus der Forderung der Ähnlichkeit in den kleinsten Teilen. Damit ist zugleich bewiesen, dass das Bestehen der Gleichungen (6) nicht nur, wie bei LAGRANGE, hinreichend, sondern auch notwendig ist. Während ferner LAMBERT aus den Formeln von LAGRANGE keinen Nutzen gezogen hatte, gelingt es EULER, mit ihrer Hilfe besondere Lösungen der Aufgabe herzuleiten.

Ein Blick auf die vorstehenden Formeln lässt erkennen, dass das Verfahren von LAGRANGE und EULER sich ohne weiteres auf den allgemeineren Fall übertragen lässt, wo das Quadrat des Linienelementes der krummen Fläche, die konform auf die Ebene abgebildet werden soll, auf die Gestalt

$$ds^2 = \psi(\lambda, \mu)(d\lambda^2 + d\mu^2) \tag{7}$$

gebracht werden kann. Für die Drehflächen, bei denen vermöge der Meridiane und Parallelkreise

$$ds^2 = dp^2 + G(p)\, d\lambda^2 \tag{8}$$

ist, gelingt das sofort durch die Substitution

$$\mu = \int \frac{dp}{\sqrt{G(p)}}. \tag{9}$$

Auf diese Weise ist LAGRANGE 1781 zu den allgemeinen Formeln für die konforme Abbildung einer Drehfläche auf eine Ebene gelangt; er hat davon schöne Anwendungen gemacht[2].

Der Fortschritt, den GAUSS in der Preisschrift vom Jahre 1822 gemacht hat, liegt darin, dass er zeigte, wie man bei einer beliebigen (reellen) krummen Fläche, bei der das Quadrat des Linienelements in der allgemeinen

---

1) L. EULER, *De repraesentatione superficiei sphaericae super plano*, Acta acad. sc. Petrop. t. ; pro anno 1777: I, 1778, S. 107.

2) J. L. LAGRANGE, *Sur la construction des cartes géographiques*, Nouv. Mém. de l'Acad., année 1779, Berlin 1781, S. 161, 186; Oeuvres, t. 4, S. 635.

Form

(10) $$ds^2 = E dp^2 + 2F dp\,dq + G dq^2$$

gegeben ist, die besondere Form

(11) $$ds^2 = \psi(\lambda, \mu)(d\lambda^2 + d\mu^2)$$

herstellen kann. Dies geschieht, indem die Gleichung

(12) $$ds^2 = 0$$

integriert wird. oder was auf dasselbe hinauskommt, indem für zwei konjugiert komplexe lineare Differentialformen, deren Produkt ds^2 ist, die ebenfalls konjugiert komplexen EULERschen Multiplikatoren ermittelt werden. Damit aber erhält man zugleich die allgemeine konforme Abbildung der gegebenen krummen Fläche auf die Ebene, sodass es des Verfahrens von LAGRANGE gar nicht mehr bedarf, und während bei LAGRANGE das Imaginäre nur formal als Mittel zur Integration der Gleichungen (6) auftrat, ist jetzt durch die Gleichung $ds^2 = 0$ der wahre Grund für das Auftreten von Funktionen komplexer Grössen aufgedeckt.

Wer sich der hier dargelegten Auffassung anschliesst, wird dem Urteil JACOBIS nicht beipflichten können. dass »der LAGRANGEschen Arbeit nur wenig hinzuzusetzen war«[1]. JACOBI hat auch beanstandet, dass GAUSS diese Arbeit nicht erwähnt habe; allein GAUSS ist überhaupt nicht auf die Geschichte der konformen Abbildung eingegangen, ebenso wie sich auch EULER aller Anführungen enthalten hatte.

30.

Vorarbeiten zu den Allgemeinen Untersuchungen über die krummen Flächen (1822—1825).

GAUSS hatte der Kopenhagener Preisschrift als Kennwort den Ausspruch NEWTONS mitgegeben: Ab his via sternitur ad maiora; diese Worte bilden den Schluss der 1704 als Anhang zur Optik veröffentlichten Abhandlung *De quadratura curvarum*, in der NEWTON ältere Untersuchungen bekannt gab, die ihn zur Fluxionsrechnung geführt hatten[2].

---

1) C. G. JACOBI, *Vorlesungen über Dynamik*, gehalten im W.-S. 1842/43, 2. Ausgabe, Berlin 1884, S. 215; vgl. auch Br. G.-SCH., III, S. 173, der beim Abdruck unterdrückte Name ist v. LITTROW.

2) J. NEWTON, *Opuscula mathematica*, rec. I. Castillioneus, vol. 1, Lausanne und Genf 1744, S. 244; es heisst wörtlich: »Et his principiis via ad maiora sternitur«.

Was waren die grösseren Dinge, zu denen die konforme Abbildung den Weg bahnte? Eine Andeutung findet man im Art. 4 der Preisschrift: »Wenn überdies [das Vergrösserungsverhältnis bei der Abbildung] $m = 1$ ist, wird eine vollkommene Gleichheit [der einander entsprechenden Linienelemente] stattfinden, und die eine Fläche sich auf die andere abwickeln lassen« (W. IV, S. 195). Dass die Lehre von der Abwicklung oder Biegung der krummen Flächen gemeint war, beweist eine Aufzeichnung, die GAUSS am 13. Dezember 1822, zwei Tage, nachdem er die Beantwortung der Preisfrage an SCHUMACHER abgesandt hatte, begonnen und am 15. Dezember beendet hat (W. VIII, S. 374—384). Sie führt den Titel: Stand meiner Untersuchung über die Umformung der Flächen und zeigt, dass er damals für den besonderen Fall, wo das Quadrat des Linienelementes vermöge der konformen Abbildung auf die Form

$$(1) \qquad ds^2 = m(dp^2 + dq^2)$$

gebracht ist, die Rechnungen durchgeführt hat, die sich für den allgemeinen Fall, wo

$$(2) \qquad ds^2 = E dp^2 + 2 F dp dq + G dq^2$$

ist, in den Artt. 9 und 10 der *Disq. gen.* finden. Das Endergebnis besteht in dem Lehrsatz, dass das Krümmungsmass der Fläche allein durch die Funktion $m(p, q)$ und deren erste und zweite partielle Ableitungen nach p und q ausgedrückt werden kann. Hieraus folgt sogleich, dass das Krümmungsmass bei den Biegungen einer Fläche erhalten bleibt.

Wir haben gesehen, dass GAUSS das »schöne Theorem« von der Erhaltung des Krümmungsmasses oder genauer von der Erhaltung der Gesamtkrümmung solcher Flächenstücke, die durch Biegung aus einander hervorgehen, bereits im Jahre 1816 besass. Wenn man annimmt, dass er den vorstehenden aus der konformen Abbildung fliessenden Beweis, der in der Aufzeichnung vom Dezember 1822 als Ziel der Untersuchung erscheint, in der Zeit zwischen 1816 und 1822 gefunden hat, so entsteht die Frage, welches die ursprüngliche Quelle für das Theorem gewesen ist. Aufzeichnungeu aus der Zeit vor 1816, die sich darauf beziehen, sind nicht vorhanden, es lässt sich jedoch sehr wahrscheinlich machen, dass die Lehre von den kürzesten Linien auf krummen Flächen den Zugang eröffnet hat.

Die stärksten Gründe für diese Behauptung ergeben sich aus einem ersten Entwurfe der *Disq. gen.*, der den Titel führt: »*Neue allgemeine Untersuchungen über die krummen Flächen*« und der aus den letzten Monaten des Jahres 1825 stammt (W. VIII, S. 408—442). Es empfiehlt sich daher, zunächst die Entstehung dieses Entwurfs zu schildern und jene Frage im Zusammenhang mit dem Bericht über dessen Inhalt zu erörtern.

Schon am 28. Juli 1823 hatte Gauss, an die kürzlich erfolgte Erteilung des Kopenhagener Preises anknüpfend, zu Olbers bemerkt: »Sollte ich in diesem Leben noch einmal in eine dem Arbeiten günstigere Lage kommen, so werde ich diese Abhandlung [die Preisschrift] mit als Teil einer viel ausgedehnteren Untersuchung verarbeiten« (Br. G.-O., 2, S 252). Er meinte damit ein grösseres, die Theorie und die Praxis der höheren Geodäsie behandelndes Werk. Ein solcher Plan wird ausdrücklich in dem Brief an Olbers vom 9. Oktober 1825 erwähnt. »Ich habe dieser Tage angefangen, in Beziehung auf mein künftiges Werk über Höhere Geodäsie einen (sehr) kleinen Teil dessen, was die krummen Flächen betrifft, in Gedanken etwas zu ordnen. Allein ich überzeuge mich, dass ich bei der Eigentümlichkeit meiner ganzen Behandlung des Zusammenhanges wegen gezwungen bin, sehr weit auszuholen, sodass ich sogar meine Ansicht über die Krümmungshalbmesser bei planen Kurven vorausschicken muss. Ich bin darüber fast zweifelhaft geworden, ob es nicht geratener sein wird, einen Teil dieser Lehren, der ganz rein geometrisch (in analytischer Form) ist und Neues mit Bekanntem gemischt in neuer Form enthält, erst besonders auszuarbeiten, es vielleicht von dem Werke abzutrennen und als eine oder zwei Abhandlungen in unsere Commentationen einzurücken. Indessen kann ich noch vorerst die Form der Bekanntmachung auf sich beruhen lassen und werde einstweilen in dem zu Papier bringen fortfahren« (W. VIII, S. 397, IX, S. 376)[1].

Die Briefe an Schumacher vom 21. November 1825 (W. VIII, S. 400) und an Hansen vom 11. Dezember 1825 (Brief im Gauss-Archiv) zeigen, dass Gauss bis gegen Ende des Jahres an dem Entwurf gearbeitet hat. Mit der Darstellung des Krümmungsmasses bei geodätischen Polarkoordinaten, für die

(3) $$ds^2 = dp^2 + G\,dq^2$$

1) Vgl. auch den Brief an Pfaff vom 21. März 1825: »Nach Beendigung der Messungen werde ich darüber ein eigenes Werk, vermutlich von bedeutender Ausdehnung, ausarbeiten« (W. X 1, S. 250).

wird, hat er abgebrochen, augenscheinlich, weil er jetzt erkannte, dass es möglich sei, eine entsprechende Formel für die allgemeine Form (2) des Quadrats des Linienelementes aufzustellen. Bei der wirklichen Durchführung dieses Gedankens, an die er sogleich ging, ist GAUSS auf grosse Schwierigkeiten gestossen. Er hat sie erst im Herbst 1826 überwunden. Hierüber wird in der nächsten Nummer berichtet werden, in dieser Nummer wenden wir uns zu den *Neuen allgemeinen Untersuchungen*.

Wie GAUSS in dem Brief an OLBERS vom 9. Oktober 1825 angekündigt hatte, beginnen die *Neuen allgemeinen Untersuchungen über die krummen Flächen* mit den ihm eigentümlichen Ansichten über die Krümmung ebener Kurven (artt. 1—6). Zwei Punkte sind dabei wesentlich, erstens dass er gerichtete Gerade einführt und so die Frage der Vorzeichen klärt, zweitens, dass die Krümmung der Kurven mittels derjenigen Abbildung auf den Kreis vom Halbmesser Eins eingeführt wird, bei der Punkte mit parallelen Normalen einander entsprechen.

Zum Raume übergehend bringt GAUSS zunächst (artt. 7—8) sieben einleitende Sätze, die später in die artt. 1, 2 und 4 der *Disq. gen.* aufgenommen worden sind; sie dienen dazu, die Abbildung der krummen Fläche auf die Kugel vom Halbmesser Eins mittels paralleler Normalen vorzubereiten. Das vorletzte Theorem ist neu; es findet sich auch im Handbuch 19 Be, S. 78 und stammt aus der Zeit um 1810.

Es folgt (artt. 9—11) die Untersuchung des Verhaltens einer krummen Fläche in der Umgebung eines regulären Punktes. GAUSS benutzt hier nicht wie in den *Disq. gen.* (art. 8) das Verfahren der Reihenentwicklung, sondern betrachtet die Schnittkurven der Fläche mit dem Büschel der durch den betrachteten Punkt gehenden Ebenen; er gelangt daher hier auch zu dem Satze von MEUSNIER, der in den *Disq. gen.* nicht vorkommt.

Am Schluss des art. 11 wird die Abbildung der krummen Fläche auf die Einheitskugel mittels paralleler Normalen gelehrt. Von hier aus gelangt man, in Verallgemeinerung der bei den ebenen Kurven angestellten Überlegungen, zu den Begriffen der Gesamtkrümmung eines Flächenstückes und des Krümmungsmasses, das einem Flächenpunkte zugeordnet ist. Die einem Flächenstück entsprechende Area auf der Einheitskugel wird hier noch nicht als deren Gesamtkrümmung bezeichnet. Dieser Name ist also wohl erst später

entstanden. In dem Brief an OLBERS vom 20. Oktober 1825 sagt GAUSS, seine Untersuchungen bezögen sich auf eine Menge von Gegenständen. die er nicht anführen könne, »weil die Begriffe davon nicht gangbar sind und selbst noch keine Namen dafür existieren« (Br. G.-O. 2, S. 431, W. VIII, S. 398). Endlich wird der Zusammenhang zwischen dem Krümmungsmass und den beiden Hauptkrümmungen entwickelt.

Im Unterschied gegen die *Disq. gen.* wendet sich GAUSS nunmehr sogleich zu den kürzesten Linien, die auf der betrachteten krummen Fläche liegen, und geht hier auch auf ganz andere Art vor als dort.

Die Aufgabe. zwei gegebene Punkte einer krummen Fläche durch die kürzeste Linie zu verbinden, war 1697 von JOHANN BERNOULLI den Geometern gestellt worden[1], aber erst 1732 hatte EULER eine Lösung veröffentlicht[2]; BERNOULLI gab sein Verfahren 1742 bekannt[3]. Im Laufe des 18. Jahrhunderts wurden besonders die kürzesten Linien auf dem elliptischen Sphäroide untersucht, weil sie für die Geodäsie wichtig waren. Diese Kurven wurden daher als geodätische Linien bezeichnet: erst seit der Mitte des 19. Jahrhunderts ist es üblich geworden, bei beliebigen krummen Flächen von geodätischen Linien zu sprechen[4].

GAUSS war, wie wir gesehen haben (S. 85). schon vor 1816 damit beschäftigt gewesen, die Lehre von den kürzesten Linien des Sphäroides für die Zwecke der Geodäsie auszubauen. Er hat sich aber damals auch schon mit den kürzesten Linien auf beliebigen krummen Flächen beschäftigt, denn in dem Briefe an SCHUMACHER vom 21. November 1825 schreibt er, seine allgemeinen Untersuchungen über die krummen Flächen seien durch manchen glücklichen Fund belohnt worden. »So habe ich zum Beispiel die Generalisierung des LEGENDREschen Theorems, dass auf der Kugel die Seiten [eines kleinen sphärischen Dreiecks] proxime den Sinus der um $\frac{1}{3}$ des sphärischen Exzesses verminderten Winkel proportional sind. auf krumme Flächen jeder

1) JOH. BERNOULLI, Journal des savants, année 1697, S. 394, Opera omnia, Lausanne 1742, t. I, S. 204.

2) L. EULER, *De linea brevissima in superficie quacunque duo quaelibet puncta iungente,* Comment. acad sc. Petrop. t. 3 (1728), 1732, S. 110.

3) JOH. BERNOULLI, *In superficie quacunque curva ducere lineam inter duo puncta brevissimam,* Opera omnia, Lausanne 1742, t. IV, S. 108.

4) Vgl. P. STÄCKEL, *Bemerkungen zur Geschichte der geodätischen Linien,* Leipziger Berichte, 1893, S. 444.

Art (wo die Verteilung ungleich geschehen muss), welche ich der Materie nach schon seit vielen Jahren besessen, aber noch nicht zu möglicher Mitteilung an andere entwickelt hatte, jetzt auf eine überaus elegante Gestalt gebracht« (W. VIII. S. 400; vgl. auch den Brief an OLBERS vom 20. Oktober 1825, Br. G.-O. 2, S. 431, W. VIII, S. 399). In einer gleichzeitig niedergeschriebenen Aufzeichnung hat GAUSS sein Verfahren angedeutet (W. VIII, S. 401—405): jene ungleiche Verteilung wird danach bedingt durch die Werte, die dem Krümmungsmass der Fläche in den Eckpunkten des Dreiecks zukommen.

LEGENDRE hatte sein Theorem von der Zurückführung eines kleinen sphärischen Dreiecks auf ein ebenes Dreieck mit Seiten derselben Länge 1789 ohne Beweis bekanntgemacht[1] und den Beweis 1798 nachgeholt[2].

Bei einer Verallgemeinerung auf geodätische Dreiecke beliebiger krummer Flächen musste der erste Schritt sein, die Winkelsumme eines solchen Dreiecks zu ermitteln, und nun sehen wir, dass GAUSS in den *Neuen allgemeinen Untersuchungen*, zu denen wir hiermit zurückkehren, nachdem er bewiesen hat, dass für jeden Punkt einer kürzesten Linie die Schmiegungsebene die betreffende Flächennormale in sich enthält (art. 12), sogleich zu dem Satze übergeht, dass die Summe der Winkel eines geodätischen Dreiecks von zwei Rechten um einen Betrag abweicht, der durch den Inhalt des entsprechenden Dreiecks auf der Einheitskugel gegeben wird, wenn man deren Oberfläche gleich acht Rechten setzt.

GAUSS schreibt am 21. November 1825, er habe die Generalisierung des LEGENDREschen Theorems schon seit vielen Jahren besessen. Man wird daher annehmen dürfen, dass er die ersten Schritte dazu schon vor 1816 gemacht hatte, dass er also schon damals den Satz von der Winkelsumme eines geo-

---

1) A. M. LEGENDRE, *Mémoire sur les opérations trigonométriques dont les résultats dépendent de la figure de la terre,* Histoire de l'Acad., année 1787, Paris 1789, Mémoires, S. 358.

2) A. M. LEGENDRE, *Résolution des triangles sphériques dont les cotés sont très-petits, pour la détermination d'un arc de méridien,* Note III des Werkes von DELAMBRE, *Méthodes analytiques pour la détermination d'un arc de méridien,* Paris, an VIII; kurz darauf erschien im Journal de l'école polytechnique ein Beweis von LAGRANGE, *Solutions de quelques problèmes relatifs aux triangles sphériques,* t. II, cah. 6, Paris 1798, S. 270; Oeuvres, t. 7, S. 329. Der Merkwürdigkeit wegen sei hier auf die anmassende Kritik hingewiesen, die KAESTNER in seinen *Geometrischen Abhandlungen,* 2. Sammlung, Göttingen 1791, S. 456—458 an dem LEGENDREschen Theorem geübt hat, vielleicht hat sie zu dem geringschätzigen Urteil beigetragen, das GAUSS über KAESTNER als Mathematiker gefällt hat.

dätischen Dreiecks besass, zu dessen Herleitung die Kenntnis der einfachsten Eigenschaften der kürzesten Linien genügt, sobald man den genialen Gedanken der Abbildung mittels paralleler Normalen gefasst hat; die Beziehung der Richtungen im Raume auf die Einheitskugel hat GAUSS aber schon im Jahre 1799 besessen, das zeigt die bereits S. 87 erwähnte Aufzeichnung vom November 1799. Wir wissen ferner, dass er schon vor 1816 die Biegung krummer Flächen betrachtet und nach Kennzeichen dafür gefragt hatte, dass zwei gegebene Flächen durch Biegung aus einander hervorgehen (W. VIII, S. 372). Bei der Biegung entsteht aber aus einem geodätischen Dreieck wieder ein geodätisches Dreieck mit denselben Winkeln, es bleibt also die Winkelsumme erhalten und damit auch die Grösse der Area, die dem geodätischen Dreieck auf der Einheitskugel bei der Abbildung mittels paralleler Normalen entspricht. Denkt man sich also ein beliebiges Flächenstück in geodätische Elementardreiecke (Triangulation) zerlegt, so folgt, dass bei der Biegung irgend welchen einander entsprechenden Flächenstücken gleich grosse Flächenstücke auf der Einheitskugel zugeordnet werden, und das ist genau das »schöne Theorem«. Wird schliesslich, damit man zu einer Funktion des Ortes auf der Fläche gelangt, in naturgemässer Verallgemeinerung des Begriffes der Krümmung bei Kurven das Krümmungsmass bei Flächen als der Grenzwert erklärt, dem das Verhältnis der Area auf der Einheitskugel zu dem entsprechenden Flächenstück zustrebt, wenn dieses auf den betrachteten Punkt zusammenschrumpft, so ergibt sich »der wichtige Lehrsatz, dass bei der Übertragung der Flächen durch Abwicklung das Krümmungsmass an jeder Stelle unverändert bleibt«, und das ist das Endergebnis der Entwicklungen in den artt. 13—16 der *Neuen allgemeinen Untersuchungen*. Die hier gegebene Herleitung wird man mithin als die ursprüngliche, vor 1816 gefundene, dagegen die Herleitung aus der Form (1) des Quadrates des Linienelements als die spätere, zwischen 1816 und 1825 entstandene anzusehen haben.

Es folgt der Beweis des Satzes, dass der Ort der Punkte gleicher geodätischer Entfernung von einem Punkte der Fläche eine Kurve ist, die alle von dem Punkte ausgehenden geodätischen Linien unter rechtem Winkel schneidet (art. 17), und den Schluss des Entwurfes bildet der Satz, dass bei Einführung geodätischer Polarkoordinaten, die dem Quadrate des Linienelements die Gestalt (3) verleihen, das Krümmungsmass allein durch die

Funktion $G(p, q)$ und deren erste und zweite partielle Ableitungen nach p und q ausgedrückt werden kann (art. 18).

Damit war ein dritter Beweis für die Erhaltung des Krümmungsmasses gegenüber Biegungen gefunden. Was aber bei den beiden besonderen Formen (1) und (3) des Linienelementes gelungen war, musste auch für die allgemeine Form (2) gelten, das heisst, es musste möglich sein, das Krümmungsmass allein durch die Funktionen $E(p, q)$, $F(p, q)$, $G(p, q)$ und deren erste und zweite partielle Ableitungen auszudrücken. So lange das nicht geleistet war, hatte die Lehre vom Krümmungsmass keine befriedigende Gestalt gewonnen, und daher hat GAUSS Ende 1825 den Entwurf beiseite gelegt, »nil fecisse putans, si quid superesset agendum«.

31.

Die Entstehung der Disquisitiones generales circa superficies curvas (1826—1827).

Nur nach langem, hartem Ringen hat GAUSS das Ziel erreicht, das er sich Ende 1825 gestellt hatte, die Lehre von den krummen Flächen in voller Allgemeinheit zu begründen. Am 19. Februar 1826 schreibt er an OLBERS: »Ich wüsste kaum eine Periode meines Lebens, wo ich bei so angestrengter Arbeit wie in diesem Winter doch verhältnismässig so wenig reinen Gewinn geerntet hätte. Ich habe viel, viel Schönes herausgebracht, aber dagegen sind meine Bemühungen über anderes oft Monate lang fruchtlos gewesen (Br. G.-O. 2, S. 438). Und am 2. April 1826: »Meine theoretischen Arbeiten lassen bei ihrem so sehr grossen Umfange leider noch viele Lücken; am leichtesten wäre mir geholfen, wenn ich mir erlaubte, mit der Bekanntmachung meiner Messungen zwar alle meine Rechnungseinrichtungen zu verbinden, aber deren Ableitungen aus ihren höhern Gründen für ein ganz getrenntes Werk für glücklichere zukünftige Zeiten aufsparte. Dann wäre nirgends ein Anstoss. Vors erste werde ich die scharfe Ausgleichung meiner 32 Punkte, die 51 Dreiecke und 146 Richtungen liefern, vornehmen« (W. IX, S. 376). Es sei hierzu bemerkt, dass die Arbeiten im Felde im August 1825 beendet waren, und es sich lediglich um den Abschluss der Rechnungen handelte, sodass GAUSS für seine theoretischen Arbeiten Zeit gewann.

Im Herbst 1826 scheint Gauss durchgedrungen zu sein. Er berichtet am 20. November an Bessel: »Die Verarbeitung der Materialien zu dem beabsichtigten Werke über meine Messungen kostet mich viele Zeit. Meine Hauptdreiecke, 33 Punkte befassend, sind zwar längst fertig berechnet, aber die Berechnung der vielen geschnittenen Nebenpunkte . . . macht viel Arbeit. . . . Noch viel mehr Verlegenheit macht mir der weit ausgedehntere theoretische Teil, der so vielfach in andere Teile der Mathematik eingreift. Ich sehe hier kein anderes Mittel, als mehrere grosse Hauptpartien von dem Werke abzutrennen, damit sie selbständig und in gehöriger Ausführlichkeit entwickelt werden können. Gewissermassen habe ich damit schon in meiner Schrift über die Abbildung der Flächen unter Erhaltung der Ähnlichkeit der kleinsten Teile den Anfang gemacht; eine zweite Abhandlung, die ich vor ein paar Monaten der Königlichen Sozietät übergeben habe und die hoffentlich bald gedruckt werden wird, enthält die Grundsätze und Methoden zur Ausgleichung der Messungen[1]. . . . Vielleicht werde ich zunächst erst noch eine dritte Abhandlung ausarbeiten, die mancherlei neue Lehrsätze über krumme Flächen, kürzeste Linien, Darstellung krummer Flächen in der Ebene usw. entwickeln wird. Hätten alle diese Gegenstände in mein projektiertes Werk aufgenommen werden sollen, so hätte ich entweder manches ungründlich abfertigen oder dem Werk ein sehr buntscheckiges Ansehen geben müssen« (W. IX, S. 362).

Mit der Ausarbeitung der dritten Abhandlung hat Gauss bald darauf begonnen. Nach dem Briefe an Olbers vom 14. Januar 1827 (Br. G.-O. 2, S. 467) war er damals »schon ziemlich damit vorgerückt«, und am 1. März 1827 schreibt er jenem, die Abhandlung sei vollendet, er werde sie jedoch der Sozietät noch nicht übergeben, da doch auf die Ostermesse kein Band der Denkschriften herauskomme (W. IX, S. 377). In der Tat sind die ***Disquisitiones generales circa superficies curvas*** der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften erst am 8. Oktober 1827 vorgelegt und in den Band VI der Commentationes recentiores vom Jahre 1828 aufgenommen worden (W. IV, S. 217). Vorher war in den Göttinger Gelehrten Anzeigen vom 5. November 1827 eine ausführliche Selbstanzeige erschienen (W. IV, S. 341—347).

1) C. F. Gauss, *Supplementum theoriae combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae*, vorgelegt den 16. September 1826, W. IV, S. 55.

Von den Neuen allgemeinen Untersuchungen unterscheiden sich die *Disquisitiones generales* hauptsächlich in zwei Punkten: sie enthalten erstens den Ausdruck für das Krümmungsmass bei beliebiger Wahl der bestimmenden Veränderlichen p, q und zweitens die Verallgemeinerung des LEGENDREschen Theorems von der Kugel auf beliebige Flächen.

Die allgemeine Formel für das Krümmungsmass hat sich GAUSS, wie schon angedeutet wurde, im Laufe des Jahres 1826 erarbeitet. Die im Nachlass befindlichen Aufzeichnungen gestatten es hier, einmal einen vollständigen Einblick in die Entstehung seiner Gedanken zu gewinnen. Da GAUSS dabei an schon vorliegende Untersuchungen über die Abwicklung krummer Flächen anknüpft, wird es angebracht sein, einen kurzen geschichtlichen Überblick vorauszuschicken[1].

Die Abwicklung von Zylindern und Kegeln auf die Ebene war im 18. Jahrhundert wiederholt betrachtet und zur Lösung von Aufgaben benutzt worden. EULER hatte dann (1770) nach den krummen Flächen gefragt, die sich überhaupt auf eine Ebene abwickeln lassen, und war, indem er der Anschauung entnahm, dass die gesuchten Flächen gradlinig sein müssen, zu ihrer allgemeinen Darstellung gelangt[2]. Wie eine erst im Jahre 1862, also nach dem Tode von GAUSS aus EULERS Nachlass abgedruckte Notiz[3] zeigt, ist dieser um dieselbe Zeit zu dem Problem gelangt, »invenire duas superficies, quarum alteram in alteram transformare licet, ita ut in utraque singula puncta homologa easdem inter se teneant distantias«, und er hat dafür genau die Gleichungen angesetzt, die man im art. 12 der *Disq. gen.* findet. Es ist ihm auch gelungen, ihre Integration für die Biegung von Kegeln in Kegel durchzuführen, und er hat zum Schluss die Frage nach den Biegungen von Stücken einer Kugelfläche aufgeworfen.

Unabhängig von EULER hatte MONGE Untersuchungen über die auf die Ebene abwickelbaren Flächen angestellt. Er hat sie, durch EULERS Abhandlung vom Jahre 1771 veranlasst, in einer zweiten Arbeit weiter geführt; in

1) Ausführliche Angaben findet man bei P. STÄCKEL, *Bemerkungen zur Geschichte der geodätischen Linien*, Leipziger Berichte, 1893, S. 152—155.

2) L. EULER, *De solidis, quorum superficiem in planum explicare licet*, Novi Comment. Petrop. 16 (1771), 1772, S. 3; vorgelegt am 5. März 1770.

3) L. EULER, *Opera postuma*, St. Petersburg 1862, t. I, S. 491—496.

dieser findet sich auch die bekannte partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung für die auf die Ebene abwickelbaren Flächen[1]).

Wie GAUSS zu dem allgemeinen Begriff der Biegung krummer Flächen gelangt ist, wissen wir nicht. Es ist nicht wahrscheinlich, dass die bereits erwähnten Arbeiten über die Gestalt elastischer Flächen, an denen sich ausser POISSON (1814) auch LAGRANGE (1811) und SOPHIE GERMAIN (1815) beteiligt hatten[2], auf ihn Einfluss gehabt haben. Dagegen sind ihm die schon früher veröffentlichten Abhandlungen von EULER und MONGE bekannt gewesen. Die auf die Ebene »abwicklungsfähigen Flächen« hat er bereits in der Aufzeichnung vom Dezember 1822 (W. VIII, S. 382—384) nach der Seite des Krümmungsmasses betrachtet, und in den *Neuen allgemeinen Untersuchungen* (art. 16) bemerkt er, aus dem Satze von der Erhaltung des Krümmungsmasses folge der wichtige, aber bis jetzt nicht mit der wünschenswerten Evidenz abgeleitete Lehrsatz, dass bei jenen Flächen das Krümmungsmass verschwindet, und damit sei erst bewiesen, dass sie der bekannten Differentialgleichung genügen (vgl. auch W. VIII, S. 437 und 444).

Wie wir sahen, hatte GAUSS bei zwei besonderen Formen des Linienelementes das Krümmungsmass durch den darin auftretenden Koeffizienten und dessen erste und zweite partielle Ableitungen ausdrücken können. Er wusste, dass das Krümmungsmass bei den Biegungen erhalten bleibt, folglich musste bei der allgemeinen Form des Linienelementes das Krümmungsmass ebenfalls durch die darin auftretenden Koeffizienten und deren partielle Ableitungen darstellbar sein. Allein die Rechnungen, die dort zum Ziel geführt hatten, liessen sich nicht ohne Weiteres auf den Fall beliebiger bestimmender Grössen übertragen; hierauf beziehen sich wohl die Klagen über die Un-

---

1) G. MONGE, *Sur les développées, les rayons de courbure et les différents genres d'inflexions des courbes à double courbure,* Mém. sav. étr. t. 10, Paris 1785, S. 511 (eingereicht 1771); *Sur les propriétés de plusieurs genres de surfaces courbes, particulièrement sur celles des surfaces développables, avec une application à la théorie des ombres et pénombres,* Mém. sav. étr. t. 9, Paris 1780, S. 382 (eingereicht 1775); vgl. auch J. MEUSNIER, *Sur la courbure des surfaces,* Mém. sav. étr. t. 10, Paris 1785, S. 509 (vorgelegt 1776).

2) J. L. LAGRANGE, *Mécanique analytique,* 2. éd., t. I, Paris 1812, Statique, sect. V, Chap. 3, § II; *De l'équilibre d'un fil ou d'une surface flexible et au même temps extensible et contractible,* Oeuves, t. 11, S. 156; S. GERMAIN, *Recherches sur la théorie des surfaces élastiques,* Paris 1820 (verfasst 1815). Diese Untersuchungen waren veranlasst durch CHLADNIS Entdeckungen über die Klangfiguren (*Akustik* Leipzig 1802).

fruchtbarkeit langer Bemühungen in dem schon angeführten Briefe an OLBERS vom 19. Februar 1826.

Im Sommer oder Herbst des Jahres kam GAUSS auf den Gedanken, die auf die Ebene abwickelbaren Flächen heranzuziehen. Diese sind einerseits dadurch gekennzeichnet, dass das Krümmungsmass verschwindet, andererseits aber dadurch, dass für sie

$$E\,dp^2 + 2F\,dp\,dq + G\,dq^2 = dt^2 + du^2,$$

das heisst gleich dem Produkt der beiden vollständigen Differentiale $d\lambda = dt + i\,du$ und $d\mu = dt + i\,du$ ist. GAUSS verschaffte sich jetzt (W. VIII, S. 446, Handbuch 16 Bb, S. 114) die Bedingungsgleichung dafür, dass

$$E\,dp^2 + 2F\,dp\,dq + G\,dq^2 = d\lambda\,d\mu$$

wird. Es ergab sich als linke Seite ein Ausdruck, der aus den Koeffizienten E, F, G und deren ersten und zweiten partiellen Ableitungen nach p und q zusammengesetzt ist, und man durfte vermuten, dass er sich vom Krümmungsmass nur um einen unwesentlichen Faktor unterscheidet.

Damit war GAUSS in den Besitz des Zählers gelangt, der bei dem allgemeinen Ausdruck für das Krümmungsmass auftritt, und nachdem er so das Ergebnis kannte, glückte es ihm auch, die unmittelbare Ableitung der Formel zu finden, die im art. 11 der *Disq. gen.* angegeben wird. In der Tat stehen die Rechnungen über das »Krümmungsmass der Flächen bei allgemeinem Ausdruck derselben« im Handbuch 16 Bb, S. 128—131, also einige Seiten hinter der vorher erwähnten Aufzeichnung über die auf die Ebene abwickelbaren Flächen.

Von dem höheren Standpunkte aus betrachtet, den GAUSS jetzt gewonnen hatte, verlor der ursprüngliche Beweis für die Erhaltung des Krümmungsmasses in seinen Augen an Wert, ja noch mehr, der Satz von der Winkelsumme des geodätischen Dreiecks, der dafür den Ausgangspunkt gebildet hatte, bekam jetzt seine Stelle als eine Folgerung aus dem Hauptsatze von dem Krümmungsmass, wenn man ihn nämlich auf geodätische Polarkoordinaten anwandte (*Disq. gen.* art. 20).

Die Verallgemeinerung des LEGENDREschen Theorems, zu der wir uns nunmehr wenden, hätte GAUSS schon in die *Neuen allgemeinen Untersuchungen*

aufnehmen können, denn es war ihm im November 1825 gelungen, sie auf die elegante Gestalt zu bringen, die er in den artt. 25 bis 28 der *Disq. gen.* mitteilt, und er würde es sicherlich getan haben, wenn er nicht Ende 1826 die Arbeit an dem Entwurf abgebrochen hätte. Bei jener Verallgemeinerung wird die Lehre von den kürzesten Linien mit der Lehre vom Krümmungsmass verbunden, auf die sich die beiden Hauptabschnitte jener Abhandlung beziehen, und so erscheint der Satz von der Zurückführung kleiner geodätischer Dreiecke auf ebene Dreiecke als die Krönung des Gebäudes der allgemeinen Lehre von den krummen Flächen. Zugleich aber bildet er in echt Gaussscher Art den Übergang zu den Anwendungen. Gauss hat sich hierüber in dem Briefe an Olbers vom 1. März 1827 folgendermassen ausgesprochen: »Jene Abhandlung enthält zur unmittelbaren Benutzung in meinem künftigen Werk über die Messung eigentlich nur ein paar Sätze, nämlich:

1) was zur Berechnung des Exzesses der Summe der 3 Winkel über 180^0 in einem Dreiecke auf einer nicht sphärischen Fläche, wo die Seiten kürzeste Linien sind, erforderlich ist,

2) wie in diesem Fall der Exzess ungleich verteilt werden muss, damit die Sinus den Seiten gegenüber proportional werden.

In praktischer Rücksicht ist dies zwar ganz unwichtig, weil in der Tat bei den grössten Dreiecken, die sich auf der Erde messen lassen, die Ungleichheit in der Verteilung unmerklich wird; aber die Würde der Wissenschaft erfordert doch, dass man die Natur dieser Ungleichheit klar begreife. Und so kann man allerdings hier, wie öfters, ausrufen: Tantae molis erat! um dahin zu gelangen. — Wichtiger aber als die Auflösung dieser 2 Aufgaben ist es, dass die Abhandlung mehrere allgemeine Prinzipien begründet, aus denen künftig, in einer speciellern Untersuchung, die Auflösung von einer Menge wichtiger Aufgaben abgeleitet werden kann« (W. IX, S. 378).

32.

Weitere Untersuchungen über krumme Flächen.

In der Selbstanzeige der *Disq. gen.* sagt Gauss, der Zweck der Abhandlung sei, neue Gesichtspunkte für die Lehre von den krummen Flächen zu eröffnen und einen Teil der neuen Wahrheiten, die dadurch zugänglich werden,

zu entwickeln (W. IV, S. 341). Dass dort nur ein Teil der Ergebnisse, zu denen er gelangt war, dargestellt ist, wird auch in den Briefen an BESSEL, OLBERS und SCHUMACHER ausgesprochen, die in der vorhergehenden Nummer angeführt sind, ja es wird einmal geradezu eine zweite Abhandlung über die krummen Flächen in Aussicht gestellt (Brief an OLBERS vom 1. März 1827, W. IX, S. 377).

Auch in den *Disq. gen.* finden sich Andeutungen über weitergehende Untersuchungen. So werden im art. 6 Erörterungen über die allgemeinste Auffassung des Inhalts von Figuren auf eine andere Gelegenheit verschoben. Ferner unterscheidet GAUSS im art. 13 zwischen den Eigenschaften einer krummen Fläche, die von ihrer gerade angenommenen Form abhängen, und jenen, die erhalten bleiben, in welche Form die Fläche auch gebogen wird. Hierfür nennt er das Krümmungsmass, die Lehre von den kürzesten Linien und einiges andere, dessen Behandlung er sich vorbehalte.

Zu den Gegenständen, die im art. 13 gemeint sind, gehört vor allem die »Seitenkrümmung« von Kurven auf krummen Flächen, die GAUSS schon in der Zeit zwischen 1822 und 1825 eingehend untersucht hatte (W. VIII, S. 386—395). Eine solche Kurve besitzt zunächst eine absolute Krümmung, die durch den reziproken Wert des auf die übliche Art erklärten Krümmungshalbmessers gegeben wird. Wenn man aber den Krümmungshalbmesser in zwei Komponenten, nach der Flächennormale und senkrecht dazu, zerlegt, so werden in deren reziproken Werten die Masse der Normalkrümmung und der Seitenkrümmung gewonnen. Die kürzesten Linien auf der Fläche haben die Eigenschaft, dass ihr Krümmungshalbmesser in die zugehörige Flächennormale fällt, und ihnen kommt daher die Seitenkrümmung Null zu. Sie entsprechen auch in dieser Hinsicht den geraden Linien der Ebene, und in einer Geometrie der auf einer krummen Fläche liegenden Figuren, bei der an die Stelle der Geraden die Kürzesten treten, ist bei einer Kurve die relative Krümmung, das heisst das Verhältnis des geodätischen Kontingenzwinkels zum Linienelement der Kurve, gleich der Seitenkrümmung zu setzen. Bald nach dem Erscheinen der *Disq. gen.* hat übrigens MINDING ähnliche Auffassungen veröffentlicht[1].

Im Laufe der Untersuchung überträgt GAUSS den Namen der Seiten-

1) F. MINDING, *Über die Kurven kürzesten Perimeters auf krummen Flächen*, CRELLES Journal, Bd. 5, 1830, S. 297.

krümmung auf das über die Kurve erstreckte Integral der ursprünglichen Seitenkrümmung. Er hatte dabei wohl die Verallgemeinerung des Satzes von der Winkelsumme des geodätischen Dreiecks im Auge, die später von Bonnet angegeben worden ist[1]. Hiernach ist die Gesamtkrümmung eines beliebigen auf einer krummen Fläche liegenden Dreiecks gleich dem Unterschiede der Winkelsumme gegen zwei Rechte, vermindert um das über die Begrenzung erstreckte Integral der Seitenkrümmung (im ursprünglichen Sinne des Wortes).

Die Erklärung der kürzesten Linien als der Kurven von der Seitenkrümmung Null ist auch insofern wichtig, als die Rechnungen, die Gauss daran anschliesst, einen Einblick in die Kunstgriffe gewähren, die ihn zu den eleganten Formeln im art. 22 der *Disq. gen.* geführt haben.

Ob Gauss die Geometrie der Figuren auf einer krummen Fläche noch weiter ausgebaut, ob er im besonderen den Zusammenhang zwischen der Geometrie auf den Flächen konstanten Krümmungsmasses und der nichteuklidischen Geometrie der Ebene erkannt hat, ist nicht mit Sicherheit zu entscheiden. Nahe genug musste er für jemand liegen, der schon 1794 wusste, dass dort das Verhältnis des Dreiecksinhaltes zu der Abweichung der Winkelsumme von zwei Rechten eine Konstante ist (W. VIII, S. 266). Auch die Bemerkungen, dass die Untersuchungen über die krummen Flächen so vielfach in andere Teile der Mathematik eingriffen (Brief an Bessel vom 20. November 1826, W. IX, S. 362), dass sie tief in die Metaphysik der Raumlehre eingriffen (Brief an Hansen vom 11. Dezember 1825, Gauss-Archiv) in Verbindung mit der Tatsache, dass Gauss bald nach Vollendung der *Disq. gen.* die Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie wieder aufgenommen hat (Brief an Bessel vom 27. Januar 1829, W. VIII, S. 200), lassen sich zu Gunsten einer solchen Annahme geltend machen. Ferner wird in einer Aufzeichnung aus dem Jahre 1846 (W. VIII, S. 257) die einer nichteuklidischen Geometrie eigentümliche absolute Konstante mit k bezeichnet, wo k die Quadratwurzel aus dem Krümmungsmass bedeuten würde. Bemerkenswert ist auch eine Wendung in einem aus demselben Jahre 1846 stammenden Briefe an Gerling: »Der Satz, den Ihnen Herr Schweikart erwähnt hat, dass in jeder Geometrie die Summe aller äussern Polygonwinkel von 360^0 um eine Grösse verschieden ist (nämlich

1 O. Bonnet, *Mémoires sur la théorie générale des surfaces*, Journal de l'école polytechnique, t. 19, cah. 32, 1848, S. 131.

grösser als 360° in der Astralgeometrie, wie SCHWEIKART sie aufgefasst hat), welche dem Flächeninhalt proportional ist, ist der erste, gleichsam an der Schwelle liegende Satz der Theorie, den ich schon im Jahr 1794 als notwendig erkannte« (Brief vom 2. Oktober 1846, W. VIII, S. 266); GAUSS unterscheidet also die Auffassung SCHWEIKARTS von der seinigen, bei der in jedem Falle die Winkelsumme des Dreiecks von 180° verschieden ist, sodass bei ihm neben die Geometrie, bei der die Winkelsumme kleiner als 180° ist, noch eine zweite tritt, bei der die Winkelsumme grösser als 180° wird. Wenn man beachtet, wie vorsichtig GAUSS bei solchen Andeutungen zu Werk ging (vgl. S. 9), so wird man auch auf diese Stelle Gewicht zu legen haben.

Schliesslich verdient erwähnt zu werden, dass in einer spätestens 1827 niedergeschriebenen Aufzeichnung die durch Drehung der Traktrix entstehende krumme Fläche negativen konstanten Krümmungsmasses (Pseudosphäre) als das »Gegenstück der Kugel« bezeichnet wird (W. VIII, S. 265). GAUSS erwähnt die Pseudosphäre im Zusammenhang mit der Verbiegung von Drehflächen in Drehflächen. Aber noch mehr, die von ihm aufgestellten Formeln führen zu dem Satz, dass bei der Pseudosphäre (und nur bei ihr) alle diese Drehflächen einander kongruent sind, und hierin liegt, dass man ein geodätisches Dreieck, unter Bewahrung dieser Eigenschaft, auf der Pseudosphäre ebenso verschieben kann wie ein sphärisches Dreieck auf der Kugel. Hat GAUSS deshalb den Namen »Gegenstück der Kugel« gewählt? Jedenfalls hat er den krummen Flächen von negativem konstanten Krümmungsmass seine Aufmerksamkeit zugewendet. In den schönen Untersuchungen, die MINDING, angeregt durch die *Disq. gen.*, angestellt hat, sind auch diese Ergebnisse über die Biegung der Drehflächen und über die Pseudosphäre enthalten[1]).

Auf die Biegung krummer Flächen bezieht sich auch eine wahrscheinlich Ende 1826 niedergeschriebene kurze Bemerkung, in der GAUSS die Beziehung, die bei zwei Biegungsflächen zwischen den sphärischen Abbildungen mittels paralleler Normalen besteht, zu einem Ansatz für die Lösung des allgemeinen Problems der Abwicklung krummer Flächen auf einander benutzt, der erst im Jahre 1900 aus dem Nachlass im achten Bande der Werke (S. 447—448

1) F. MINDING, *Über die Biegung gewisser Flächen*, CRELLES Journal, Bd. 18, 1838, S. 367; *Wie sich entscheiden lässt, ob zwei gegebene krumme Flächen auf einander abwickelbar seien oder nicht*, ebenda, Bd. 19, 1839, S. 378; *Über die kürzesten Linien krummer Flächen*, ebenda, Bd. 20, 1840, S. 324.

veröffentlicht worden ist. Es wäre zu wünschen, dass dieser Gedanke, der GAUSS eigentümlich ist, vollständig durchgeführt würde.

Zum Schluss sei noch berichtet, dass die philosophische Fakultät der Universität Göttingen im Jahre 1830 auf Veranlassung von GAUSS die Preisfrage stellte: Determinetur inter lineas duo puncta jungentes ea, quae circa datum axem revoluta gignat superficiem minimam. Sie wurde von seinem Landsmann, Schüler und späteren Mitarbeiter auf der Sternwarte, GOLDSCHMIDT, beantwortet, dem auch der Preis zugefallen ist[1].

33.

Bedeutung und Wirkung der Disquisitiones generales.

In den *Disquisitiones generales* wird nur ein Geometer mit Namen erwähnt: EULER. Fast alles, was dieser über die Krümmung der Oberflächen gelehrt habe, sagt GAUSS im art. 8 der *Disq.*, sei in den von ihm gegebenen Sätzen I bis IV enthalten; augenscheinlich sind EULERS 1763 verfasste *Recherches sur la courbure des surfaces*[2] gemeint. Die Untersuchungen von GAUSS berühren sich aber noch in einer Reihe anderer Punkte mit denen EULERS, und wenn es auch unentschieden bleiben muss, ob GAUSS die betreffenden Abhandlungen gekannt hat oder nicht, so scheint es doch um so mehr angebracht, die Berührungspunkte festzustellen, als dadurch die Fortschritte, die wir GAUSS verdanken, in ein helleres Licht treten.

Es möge zunächst an die in den vorangehenden Nummern erwähnten Arbeiten EULERS zur konformen Abbildung, über die kürzesten Linien und über die Abwicklung krummer Flächen auf die Ebene erinnert werden. Für die kürzesten Linien kommen ausser der grundlegenden Abhandlung vom Jahre 1729 noch zwei Veröffentlichungen in Betracht. In der einen vom Jahre 1755 hatte EULER die Anfänge einer sphäroidischen Trigonometrie entwickelt, einer Lehre von den Dreiecken, deren Seiten kürzeste Linien eines Drehellipsoides sind; auch hatte er vorgeschlagen, dass man solche Dreiecke in der Geodäsie benutzen solle[3]. In der zweiten, erst 1806 gedruckten Ab-

1) B. GOLDSCHMIDT, *Determinatio superficiei minimae rotatione curvae data duo puncta jungentis circa datum axem ortae,* Göttingen 1831.

2) Histoire de l'Acad., année 1760, Berlin 1767, Mémoires S. 119.

3) L. EULER, *Éléments de la trigonométrie sphéroidique tirés de la méthode des plus grands et plus petits,* Histoire de l'Acad., année 1753, Berlin 1755, Mémoires S. 258.

handlung, die am 25. Januar 1779 der Petersburger Akademie vorgelegt worden war, kommt er auf die allgemeine Lehre von den kürzesten Linien zurück und stellt deren Differentialgleichungen für den Fall auf, dass die krumme Fläche durch irgend eine Gleichung zwischen den kartesischen Koordinaten gegeben wird, während man früher immer vorausgesetzt hatte, dass die Gleichung nach einer Koordinate aufgelöst sei.

Die Einsicht, dass die drei kartesischen Koordinaten gleichberechtigt sind, kommt bei EULER aber auch dadurch zum Ausdruck, dass er bei den Untersuchungen über die Abwicklung krummer Flächen die drei Koordinaten sogleich als Funktionen zweier Hilfsgrössen ansetzt. Wie KOMMERELL mit Recht bemerkt[1], liegt hierin der erste Schritt zu der Auffassung der krummen Flächen als selbständiger Gebilde, die erst GAUSS mit vollem Bewusstsein ihrer Bedeutung durchgeführt hat. Ebenso hat GAUSS, geleitet von dem allgemeinen Begriff der Abbildung, jene Parameterdarstellung zur Grundlage seiner allgemeinen Untersuchungen über die krummen Flächen gemacht.

Endlich ist eine 1775 verfasste, 1786 gedruckte Arbeit über Raumkurven[2] zu erwähnen, in der EULER die Eigenschaften solcher Kurven in der Umgebung eines Punktes untersucht, indem er durch den Mittelpunkt der Einheitskugel Parallelen zu den Tangenten zieht, ganz ähnlich wie GAUSS im art. 2 der Neuen allgemeinen Untersuchungen bei ebenen Kurven den Einheitskreis verwendet. Bei GAUSS findet sich, wie schon erwähnt wurde, die Beziehung der Richtungen im Raume auf die Punkte der Einheitskugel schon in einer auf das Ende des Jahres 1799 zu setzenden Notiz (Scheda Ac, Varia, begonnen Nov. 1799, S. 3). In der Selbstanzeige der *Disq. gen.* sagt GAUSS: »Dies Verfahren kommt im Grunde mit demjenigen überein, welches in der Astronomie in stetem Gebrauch ist, wo man alle Richtungen auf eine fingierte Himmelskugel von unendlich grossem Halbmesser bezieht« (W. IV, S. 342); man darf daher annehmen, dass der Gedanke der Abbildung auf die Einheitskugel (Himmelskugel) der Astronomie seinen Ursprung verdankt.

Die Abbildung einer krummen Fläche auf die Einheitskugel mittels

---

1) M. CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, Bd. IV, Leipzig 1908, Abschnitt XXIV: KOMMERELL, *Analytische Geometrie des Raumes und der Ebene*, S. 529.

2) L. EULER, *Methodus facilis omnia symptomata linearum curvarum non in eodem plano sitarum investigandi.* Acta Petrop., t. 6 pro anno 1782 I, 1786, S. 19, 37.

paralleler Normalen ist schon vor GAUSS betrachtet und mit der Lehre von den Doppelintegralen in Zusammenhang gebracht worden, und zwar von O. RODRIGUES in einer 1815 veröffentlichten Abhandlung[1], ganz ähnlich wie es GAUSS selbst in einer Notiz über die Oberfläche des dreiachsigen Ellipsoides tut, die wohl bald nach 1813 verfasst ist (W. VIII, S. 367). RODRIGUES hat auch schon erkannt und genau auf dieselbe Weise wie GAUSS im art. 7 der *Disq. gen.* bewiesen, dass das Verhältnis der Abbildung eines Flächenelementes auf die Einheitskugel zu dem Flächenelement gleich dem Produkte der zugehörigen Hauptkrümmungen ist. Er folgert daraus, dass das Doppelintegral, das GAUSS als Gesamtkrümmung eines Flächenstückes bezeichnet hat, den Inhalt der Area auf der Kugelfläche angibt, die durch jene Abbildung erhalten wird, und da einer geschlossenen Fläche die ganze, einfach oder mehrfach bedeckte Oberfläche der Kugel entspricht, so ergibt sich der Wert des zugehörigen Doppelintegrales gleich einem positiven oder negativen Vielfachen von 2π.

Auf einen zweiten Geometer wird in den *Neuen allgemeinen Untersuchungen* und in den *Disq. gen.* hingedeutet. Auf MONGE bezieht sich nämlich die Bemerkung, dass die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung für die auf die Ebene abwickelbaren Flächen »bisher nicht mit der erforderlichen Strenge bewiesen war« (W. IV, S. 344; vgl. W. IV, S. 237 und VIII, S. 437). Dass es sich um MONGE handelt, ergibt sich aus dem Briefe an OLBERS vom Juli 1828 (W. VIII, S. 444)[2]; GAUSS sagt hier mit Recht, dass bei MONGE das Vorhandensein gerader Linien, nach denen die Fläche gebrochen wird, erschlichen sei. Im übrigen haben die Untersuchungen des französischen Geometers, die mehr die Untersuchung besonderer Flächenklassen betreffen, auf GAUSS keinen Einfluss gehabt, und dasselbe gilt auch für dessen Darstellende Geometrie, die GAUSS 1813 mit anerkennenden Worten besprochen hat (W. IV, S. 359).

Wenn man noch die Anregung hinzunimmt, dass GAUSS durch das LEGENDREsche Theorem über die Zurückführung der kleinen sphärischen Dreiecke

1) O. RODRIGUES, *Sur quelques propriétés des intégrales doubles et des rayons de courbure des surfaces*, Correspondance sur l'école polytechnique, t. 2, 1815, S. 162; abgedruckt im Bulletin de la société philomatique, année 1815, S. 34; vgl. P. STÄCKEL, *Bemerkungen zur Geschichte der geodätischen Linien*, Leipziger Berichte 1893, S. 456.

2) Der darin erwähnte, »ungezogene Ausfall« von FAYOLLE steht im Philosophical Magazine, new series, vol. 4, London 1828, S. 436; er ist abgedruckt im Briefwechsel G.-O., 2, S. 508.

auf ebene Dreiecke erfahren hat, so ist alles erschöpft, was sich aus der Zeit vor 1827 mit seinen Forschungen über die allgemeine Lehre von den krummen Flächen in Zusammenhang bringen lässt, teils auf deren Gang einwirkend, teils nur im Strom der Entwicklung auftauchend und wieder untergehend.

. Wie gross der Eindruck war, den die *Disq. gen.* sogleich bei ihrem Erscheinen machten, geht aus den Briefen von BESSEL und SCHUMACHER hervor. Mit den daran anknüpfenden, bedeutenden Arbeiten MINDINGS beginnt eine lange Reihe von Arbeiten, deren Ausgangspunkt die Untersuchungen von GAUSS bilden. Es muss jedoch hier genügen, einige noch nicht erwähnte Abhandlungen herauszugreifen, die in besonders engen Beziehungen zu den *Disq. gen.* stehen, und die Wirkung der Grundgedanken auf die weitere Entwicklung in aller Kürze zu schildern; dabei soll die Geodäsie ganz aus dem Spiele bleiben und für sie auf den schon erwähnten Aufsatz von GALLE verwiesen werden.

Schon EULER hatte in seiner Abhandlung über die Krümmung der Flächen nach einem passenden Masse (juste mesure) für die Krümmung solcher Gebilde gefragt, einem Masse, das sich der Krümmung der Kurven an die Seite stellen lasse, und unter Hinweis auf die Sattelflächen erklärt, dass es auf diese Frage keine einfache Antwort gebe; man müsse vielmehr die Gesamtheit der Krümmungen in Betracht ziehen, die den zu einem Punkte gehörigen Normalschnitten zukommen[1]. Später war bei Untersuchungen über biegsame Flächen, besonders über die Gestalt von Flüssigkeitshäutchen, das arithmetische Mittel der beiden Hauptkrümmungen aufgetreten, das schon in der von LAGRANGE (1765) begründeten Lehre von den Minimalflächen eine Rolle spielte. SOPHIE GERMAIN hat dafür 1831 den Ausdruck mittlere Krümmung vorgeschlagen[2]; in einem Briefe an GAUSS vom 28. März 1829 bemerkt sie, dieser verfahre geometrisch, sie selbst mechanisch, denn die elastische Kraft, welche die Fläche

1) Diese richtige Einsicht hat EULER nicht davor bewahrt, bald darauf, 1769, in der *Dioptrica* (Lib. I. § 4, Opera omnia, ser. 3, vol. 3, S. 8) zu behaupten, ein Flächenelement lasse sich stets als sphärisch ansehen, und damit in einen Fehler zurückzufallen, den schon LEIBNIZ begangen hatte (Brief an JOH. BERNOULLI vom 29. Juli 1698, *Commercium epistolicum,* Lausanne und Genf 1745, t. 1, S. 387, LEIBNIZens *Mathematische Schriften,* herausgegeben von C. J. GERHARDT, 1. Abt., Bd. 3, Halle 1855, S. 526). Auch D'ALEMBERT hat sich dieses Fehlers schuldig gemacht (Artikel *Surfaces courbes* in der Encyclopédie méthodique, Abteilung Mathematik, Bd. II, Paris 1784, S. 464).

2) S. GERMAIN, *Mémoire sur la courbure des surfaces,* CRELLES Journal, Bd. 7, 1831, S. 1.

in ihre ursprüngliche Gestalt zurücktreibt, sei der mittleren Krümmung proportional (Brief im Gauss-Archiv). Nach Sturm[1]) lässt sich die mittlere Krümmung auf eine ähnliche Art wie das Gausssche Krümmungsmass erklären; beschreibt man nämlich um einen Flächenpunkt eine Kugel und bildet die in die Fläche eingeschnittene Kurve mittels paralleler Normalen auf die Einheitskugel ab, so ist der Grenzwert des Verhältnisses der Umfänge beider Kurven gleich der mittleren Krümmung. Später hat Casorati[2]) das Wort »Krümmung« beanstandet, weil man auch den Flächen vom Gaussschen Krümmungsmasse Null eine gewisse Krummheit zuschreiben müsse, und als ein der Anschauung besser entsprechendes Mass das arithmetische Mittel der Quadrate der Hauptkrümmungen vorgeschlagen. »Demgegenüber ist zu bemerken, dass es für eine Fläche überhaupt keinen Ausdruck geben kann, der dem für die Krümmung einer Kurve völlig entsprechend und zugleich erschöpfend wäre. Es lassen sich vielmehr von verschiedenen Gesichtspunkten aus für die Flächenkrümmung mehr oder minder kennzeichnende Ausdrücke aufstellen, die ebenfalls als Grenzwerte anzusehen sind«[3]). Jedenfalls hat sich unter ihnen der Gausssche Ausdruck durch die Fruchtbarkeit seiner Anwendungen ausgezeichnet.

Im Laufe der Zeit hat sich immer klarer die Wichtigkeit der Formeln im art. 11 der *Disq. gen.* herausgestellt, vermöge deren die zweiten Ableitungen der kartesischen Koordinaten eines Punktes der Fläche als lineare homogene Funktionen der ersten Ableitungen und der Richtungscosinus der Normalen dargestellt werden. Weingarten hat gezeigt, wie man aus ihnen fast unmittelbar die bei dem Biegungsproblem auftretende partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung für eine der kartesischen Koordinaten ableiten kann[4]). Auf dem von Gauss gebahnten Wege weitergehend, haben Mainardi[5]) und Codazzi[6])

1) R. Sturm, *Ein Analogon zu Gauss' Satz von der Krümmung der Flächen,* Mathemat. Annalen, Bd. 21, 1883, S. 379.

2) F. Casorati, *Mesure de la courbure des surfaces suivant l'idée commune,* Acta math. 14, 1890, S. 95; vgl. auch R. v. Lilienthal, *Zur Theorie des Krümmungsmasses der Flächen,* ebenda, 16, 1892, S. 143.

3) R. v. Lilienthal, *Die auf einer Fläche gezogenen Kurven,* Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. III, Teil 3, S. 172 (1902).

4) J. Weingarten, *Über die Theorie der auf einander abwickelbaren Oberflächen,* Festschrift der Technischen Hochschule zu Berlin, 1884.

5) Mainardi, *Su la teoria generale delle superficie,* Giornale dell'Istituto lombardo, t. 9, 1857, S. 394.

6) D. Codazzi, *Sulle coordinate curvilinee d'una superficie e dello spazio,* Ann. di mat. (2), 1, 1867, S. 293; 2, 1868, S. 101. 269; *Mémoire relatif à l'application des surfaces les unes sur les autres,* Mém. prés. par divers sav., 2. série, t. 27, Paris 1883 (vorgelegt 1859).

der Gaussschen Gleichung zwischen den Fundamentalgrössen erster und zweiter Ordnung zwei Gleichungen hinzugefügt, in denen auch noch die ersten partiellen Ableitungen der Fundamentalgrössen zweiter Ordnung auftreten, und Bonnet[1]) hat bewiesen, dass umgekehrt durch solche Fundamentalgrössen erster und zweiter Ordnung, die den drei Fundamentalgleichungen genügen, die Fläche, abgesehen von ihrer Lage im Raume und einer Spiegelung, vollständig bestimmt wird.

Schliesslich mögen noch Untersuchungen erwähnt werden, die bei Lebzeiten von Gauss angestellt worden sind und eine Verallgemeinerung seines Lehrsatzes über die Winkelsumme eines geodätischen Dreiecks bezweckten. Jacobi[2]) hat im Jahre 1836 den Satz auf Dreiecke ausgedehnt, die von beliebigen Raumkurven gebildet werden, wobei nur vorausgesetzt werden muss, dass in den Ecken die beiden sich schneidenden Kurven dieselbe Hauptnormale haben; die Abbildung auf die Einheitskugel erfolgt mittels der Hauptnormalen der Kurven, die ja bei den geodätischen Linien mit den Normalen der Fläche zusammenfallen. Er hat dafür einen von dem Gaussschen Lehrsatze unabhängigen, einwandfreien Beweis gegeben. Bedenklich war jedoch eine Bemerkung, die er dem Beweis vorausschickte, dass nämlich die Verallgemeinerung des Gaussschen Lehrsatzes sich ohne Mühe (sine negotio) ergebe, wenn man beachte, dass jede Raumkurve als geodätische Linie einer gewissen Fläche angesehen werden dürfe. Dies stimmt zwar für eine einzelne Raumkurve, allein es ist, wie Clausen[3]) zeigte, im Allgemeinen bereits unmöglich, eine krumme Fläche zu bestimmen, die zwei sich in einem Punkte schneidende und dort dieselbe Hauptnormale besitzende Raumkurven als geodätische Linien in sich fasst[4]). In seiner Erwiderung[5]) gibt Jacobi, »um einige unbegründeten

1) O. Bonnet, *Mémoire sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée*, Journal de l'école polytechnique, t. 25, cah. 42, 1867, S. 31.

2) C. G. J. Jacobi, *Demonstratio et amplificatio nova theorematis Gaussiani de curvatura integra trianguli in data superficie e lineis brevissimis formati*, Crelles Journal, Bd. 16, 1837, S. 344; Werke, Bd. 7, S. 26.

3) Th. Clausen, *Berichtigung eines von Jacobi aufgestellten Theorems*, Astron. Nachrichten, Bd. 20, Nr. 457 vom 29. Sept. 1842.

4) Vgl. auch die Briefe von Schumacher an Gauss vom 1. Sept., 9. Nov. und 4 Dez. 1842 und dessen Antwort vom 3. Sept. 1842, Br. G.-Sch. IV, S. 82, 92, 101, 83.

5) C. G. J. Jacobi, *Über einige merkwürdige Curventheoreme*, Astron. Nachrichten, Bd. 20, Nr. 463 vom 15. Dez. 1842; Werke, Bd. 7, S. 34.

Zweifel über die Richtigkeit des Theorems zu beseitigen«, einen vereinfachten Beweis und bemerkt nebenbei, aus den Darlegungen von CLAUSEN folge, dass sein Theorem allgemeiner als das GAUSSsche sei, womit er stillschweigend jene Bemerkung (sine negotio) preisgibt.

Wir wenden uns nunmehr zu den Wirkungen, die die *Disquisitiones generales circa superficies curvas* vom Jahre 1828 im Lauf des neunzehnten Jahrhunderts ausgeübt haben. Wenn man die gesamte Entwicklung der mathematischen Wissenschaften während dieses Zeitraums ins Auge fasst, so sind es zwei Punkte, in denen die Untersuchungen von GAUSS zur Flächentheorie entscheidend eingegriffen haben. Erstens ist GAUSS, während man bis dahin in der Geometrie nur endliche Gruppen von Transformationen betrachtet hatte, dazu übergegangen, eine unendliche Gruppe (im Sinne von S. LIE) zu Grunde zu legen, zweitens hat er die Lehre von den krummen Flächen als die Geometrie einer zweifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit in einer Weise behandelt, die der allgemeinen Lehre von den mehrfach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten den Weg bahnte.

F. KLEIN[1]) hat das allgemeine Problem der geometrischen Forschung mit den Worten formuliert: »Es ist eine Mannigfaltigkeit und in ihr eine Transformationsgruppe gegeben. Man entwickle die auf die Gruppe bezügliche Invariantentheorie.« Nachdem die Gruppe der Bewegungen und Spiegelungen den Ausgangspunkt der geometrischen Forschung gebildet hatte, war man zu den Gruppen linearer Transformationen übergegangen, die der projektiven Geometrie eigentümlich sind, und hatte auch andere endliche Gruppen, wie die der Transformationen durch reziproke Radien, herangezogen. Ein Ansatz zur Betrachtung unendlicher Gruppen war allerdings schon in der Geometria Situs gemacht worden, aber die Fragestellung war hier zu allgemein, als dass man Anhaltspunkte für weitere Untersuchungen hätte gewinnen können; ergeben sich doch als Invarianten lediglich ganze Zahlen. Dagegen haben die Transformationen der binären quadratischen Differentialformen zu einer reichgegliederten Invariantentheorie geführt. Das GAUSSsche Krümmungsmass ist das erste Glied in der Kette solcher Invarianten. Ihm gesellt sich sogleich, als Beispiel kovarianter Bildungen, die Seitenkrümmung hinzu. Auch findet

---

1) F. KLEIN, *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*, Programm, Erlangen 1872, Math. Annalen, Bd. 43, 1893, S. 67, Gesammelte Mathem. Abhandlungen I, 1921, S. 460.

sich im art. 21 der *Disq. gen.* bei der Lehre von den geodätischen Linien schon der Differentialparameter erster Ordnung. Für die Weiterführung nach der Seite der Flächentheorie ist besonders Minding zu nennen[1]. Untersuchungen aus der theoretischen Physik veranlassten Lamé[2] bei krummlinigen Koordinaten für Punkte des Euklidischen Raumes die Differentialparameter erster und zweiter Ordnung aufzustellen, und nachdem im Jahre 1867 Riemanns Habilitationsvortrag vom 10. Juni 1854: *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*, veröffentlicht worden war, hat Beltrami[3] die allgemeine Lehre von den Differentialparametern quadratischer Differentialformen mit beliebig vielen Veränderlichen entwickelt. Gleichzeitig damit sind die Untersuchungen von Christoffel[4] und Lipschitz[5] über die Transformation solcher Differentialformen. Damit wurde der Forschung ein Feld erschlossen, das noch heute nicht abgeerntet ist.

Mit der Verallgemeinerung auf beliebig viele Veränderliche kommen wir zu dem Gesichtspunkt der mehrfach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten.

Für Gauss hatten die mehrdimensionalen Räume eine metaphysische Bedeutung. Es handelt sich hier um Spekulationen, die im 18. Jahrhundert weit verbreitet waren und die auch ins 19. hinüberreichen[6]. »Gauss, nach seiner öfters ausgesprochenen innersten Ansicht, betrachtete die drei Dimensionen des Raumes als eine spezifische Eigentümlichkeit der menschlichen Seele; Leute, welche dieses nicht einsehen könnten, bezeichnete er einmal in seiner humoristischen Laune mit dem Namen Böoter. Wir können uns, sagte er, etwa in Wesen hineindenken, die sich nur zweier Dimensionen bewusst

---

1) F. Minding, *Wie sich entscheiden lässt, ob zwei gegebene krumme Flächen auf einander abwickelbar seien oder nicht*, Crelles Journal, Bd. 19, 1893, S. 370.

2) G. Lamé, *Leçons sur les fonctions transcendantes et sur les surfaces isothermes*, Paris 1857.

3) E. Beltrami, *Sulla teorica generale dei parametri differenziali*, Memorie dell'Acc. di Bologna, zweite Reihe, Bd. 8, 1869, S. 551, Opere matematiche II, S. 74.

4) E. B. Christoffel, *Über die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades*. Journal f. r. u. a. Math., Bd. 70, 1869, S. 46; Gesammelte mathematische Abhandlungen, Bd. I, S. 352.

5) R. Lipschitz, *Untersuchungen in Betreff der ganzen homogenen Funktionen von n Differentialen*, Journal f. r. u. a. Mathematik, Bd. 70, 1869, S. 71, Bd. 71, 1870, S. 274, 288, Bd. 72, 1870, S. 1; *Bemerkungen zu dem Prinzip des kleinsten Zwanges*, ebenda, Bd. 82, 1877, S. 316 (im Anschluss an Riemanns 1876 veröffentlichte Pariser Preisarbeit vom Jahre 1861).

6) Man vgl. etwa F. Zöllner, *Naturwissenschaft und christliche Offenbarung*, Leipzig 1881, sowie die zahlreichen Veröffentlichungen von H. Scheffler in Braunschweig.

sind; höher über uns stehende würden vielleicht in ähnlicher Weise auf uns herabblicken, und er habe, fuhr er scherzend fort, gewisse Probleme hier bei Seite gelegt, die er in einem höhern Zustande später geometrisch zu behandeln gedächte« (SARTORIUS, S. 81). Solche Gedanken reichen wohl bis in die Jugend zurück, denn in dem Briefe an GRASSMANN vom 14. Dezember 1844 (W. X 1, S 436) sagt GAUSS, dessen Tendenzen in der Ausdehnungslehre begegneten teilweise den Wegen, auf denen er selbst nun seit fast einem halben Jahrhundert gewandelt sei; dabei beruft er sich auf die Selbstanzeige vom Jahre 1831, an deren Schluss von »Mannigfaltigkeiten von mehr als zwei Dimensionen« gesprochen wird (W. II, S. 178). Auch zeigt der Brief WACHTERS an GAUSS vom 12. Dezember 1816 (W. X 1, S. 481), dass bei dessen Besuch im April 1816 von Räumen mit beliebig vielen Abmessungen die Rede gewesen war.

Die Äusserung von GAUSS, über die SARTORIUS berichtet hat, fällt in die Zeit zwischen 1847 und 1855. Dass GAUSS sich gerade in den letzten Jahren seines Lebens eingehend mit mehrfach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten beschäftigt hat, lässt auch eine Stelle in den Beiträgen zur Theorie der algebraischen Gleichungen vom Jahre 1849 erkennen: »Im Grunde gehört der eigentliche Inhalt der ganzen Argumentation [beim Beweise der Wurzelexistenz] einem höhern, von Räumlichem unabhängigen Gebiete der allgemeinen abstrakten Grössenlehre an, dessen Gegenstand die nach der Stetigkeit zusammenhängenden Grössenkombinationen sind, einem Gebiet, welches zur Zeit noch wenig angebauet ist und in welchem man sich auch nicht bewegen kann ohne eine von räumlichen Bildern entlehnte Sprache« (W. III, S. 79). In einer bald darauf, im Wintersemester 1850/51, gehaltenen Vorlesung über die Methode der kleinsten Quadrate hat GAUSS Gelegenheit genommen, seinen Zuhörern einige Gedanken über solche »Mannigfaltigkeiten von mehreren Dimensionen«, allerdings unter Beschränkung auf die verallgemeinerte Massbestimmung des Euklidischen Raumes, mitzuteilen (W. X 1, S. 473—481)[1]).

Die von GAUSS begehrte Lehre von den nach der Stetigkeit zusammenhängenden Grössenkombinationen hat bekanntlich RIEMANN in seinem Habilitationsvortrage vom 10. Juni 1854 begründet; er hat sich dabei für die Konstruktion des Begriffes einer n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit ausdrücklich

1) Vgl. P. STÄCKEL, *Eine von Gauss gestellte Aufgabe des Minimums*, Heidelberger Berichte, Jahrgang 1917, 11. Abhandlung.

auf die vorher genannten Veröffentlichungen von GAUSS (*Selbstanzeige* vom Jahre 1831, *Beiträge zur Theorie der algebraischen Gleichungen* vom Jahre 1849) berufen und bei der weiteren Untersuchung über die in den Mannigfaltigkeiten waltenden Massverhältnisse als Grundlage die *Disquisitiones generales circa superficies curvas* bezeichnet. Durch RIEMANN haben also die Gedanken, deren Keime sich in der GAUSSschen Abhandlung finden, ihre volle Entfaltung erfahren. In den folgenden Jahrzehnten hat sich die Bedeutung dieser Gedanken in immer höherem Masse herausgestellt, nicht allein für die Mathematik, sondern auch für die analytische Mechanik und schliesslich für die Grundlagen der theoretischen Physik.

34.

Bibliographischer Anhang.

Die von GAUSS Ende 1822 an die Kopenhagener Societät der Wissenschaften eingesandte Abhandlung über die Abbildung krummer Flächen hatte zwar den Preis erhalten, allein die Gesellschaft überliess es den Preisträgern, für die Veröffentlichung zu sorgen, und so ist die Preisschrift erst 1825 im dritten und letzten Heft der von SCHUMACHER als Ergänzung der Astronomischen Nachrichten herausgegebenen Astronomischen Abhandlungen erschienen. Sie ist abgedruckt in den Werken, Bd. IV, 1873, 2. Abdruck 1880, S. 189—216. Eine Übersetzung ins Englische, wahrscheinlich von FRANCIS BAILY (1764—1844), ist 1828 erschienen:

General solution of the problem: to represent the parts of a given surface on another given surface, so that the smallest parts of the representation shall be similar to the corresponding parts of the surface represented. By C. F. GAUSS. Answer to the Prize Question proposed by the Royal Society of sciences at Copenhagen. The philosophical magazine, new series, vol. 4, London 1828, S. 104—113, 206—215.

Im Jahre 1894 ist die Abhandlung von A. WANGERIN neu herausgegeben worden; sie findet sich im Hefte 55 von OSTWALDs Klassikern der exakten Wissenschaften: Über Kartenprojection, Abhandlungen von LAGRANGE (1779) und GAUSS (1822), Leipzig 1894, S. 57—81.

Die Abhandlung über die allgemeine Lehre von den krummen Flächen hat GAUSS am 8. Oktober 1827 der Göttinger Societät vorgelegt. Eine von GAUSS selbst verfasste Anzeige erschien am 5. November 1827 in den Göttingischen Gelehrten Anzeigen, Stück 177, S. 1761—1768; sie ist abgedruckt in den Werken, Bd. IV, S. 341—347. Eine Übersetzung der Selbstanzeige ist schon 1829 von FRANCIS BAILY herausgegeben worden:

Account of a paper by Prof. GAUSS, intitled: Disquisitiones generales circa superficies curvas, communicated to the Royal Society of Göttingen on the 8th of october 1827, The philosophical magazine, new series, vol. 3, London 1828, S. 331—336.

Man vgl. hierzu den Brief von OLBERS an GAUSS vom 2. Juli 1828 und dessen Antwort Ende Juli 1828 (Br. G.-O. 2, S. 508, 511, zum Teil abgedruckt W. VIII, S. 444—445).

Die Abhandlung selbst ist 1828 in den Denkschriften der Göttinger Societät erschienen:

(1) Disquisitiones generales circa superficies curvas, auctore CAROLO FRIDERICO GAUSS, Societati regiae oblatae d. 8. Octob. 1827. Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores, Commentationes classis mathematicae. T. VI (ad annos 1823—1827). Gottingae 1828, S. 99—146.

Es gibt Sonderabzüge mit den Seitenzahlen 1 bis 50 und einer besonderen Titelseite, die den Vermerk: Gottingae, Typis Dieterichianis, 1828 trägt.

Der lateinische Text wurde in der fünften, von LIOUVILLE besorgten Ausgabe des Werkes: G. MONGE, Application de l'analyse à la géometrie, Paris 1850, S. 505—546 abgedruckt unter dem Titel:

2) Recherches sur la théorie générale des surfaces courbes, par M. C. F. GAUSS.

Es folgen zwei Übersetzungen ins Französische:

3) Recherches générales sur les surfaces courbes par M. GAUSS. Traduit du latin par M. T[IBURCE] A[BADIE], ancien élève de l'École polytechnique, Nouvelles annales de mathématiques, t. 11, Paris 1852, S. 195—258.

4) Recherches générales sur les surfaces courbes, par M. C. F. GAUSS, traduites en français, suivies de notes et d'études sur divers points de la théorie des surfaces et sur certaines classes de courbes, par M. E. ROGER, Paris 1855.

Nach H. D. THOMPSON (siehe Nr. 9) ist von 4) eine weitere Ausgabe Grenoble 1870, Paris 1871 erschienen.

5) Die Werke von CARL FRIEDRICH GAUSS, herausgegeben von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen bringen die Disq. gen. im vierten Bande, Göttingen 1873, S. 217—258; ein zweiter, unveränderter Abdruck ist 1880 herausgekommen.

Es gibt zwei Übersetzungen ins Deutsche. Die erste ist ein Teil des Werkes: O. BÖKLEN, Analytische Geometrie des Raumes, zweite Auflage, Stuttgart 1884, dessen zweiter Teil den Doppeltitel führt:

6) Disquisitiones generales circa superficies curvas von C. F. GAUSS, ins Deutsche übertragen, mit Anwendungen und Zusätzen. Die FRESNELsche Wellenfläche.

Die Übersetzung steht S. 197—232. Die erste Auflage, Stuttgart 1861, enthält die Übersetzung der Disq. gen. noch nicht.

Zweitens ist zu nennen:

7) Allgemeine Flächentheorie (Disquisitiones generales circa superficies curvas) von CARL FRIEDRICH GAUSS (1827). Deutsch herausgegeben von A. WANGERIN. Heft 5 von OSTWALDS Klassikern der exakten Wissenschaften, Leipzig 1889, 62 S.; zweite revidierte Auflage, Leipzig 1900, 64 S.

In den Budapester Mathematisch-physikalischen Blättern hat NIKOLAUS SZÍJÁRTÓ eine Übersetzung ins Magyarische veröffentlicht:

8) A felületek általános elmélete. Irta GAUSS KÁROLY FRIGYES. Forditotta SZÍJÁRTÓ MIKLÓS. Mathematikai és physikai lapok, Band 6, Budapest 1897, S. 45—114.

Eine Übersetzung ins Englische enthält das Buch:

9) KARL FRIEDRICH GAUSS, General investigations of curved surfaces of 1827 and 1825. Translated with notes and a bibliography by J. C. MOREHEAD and A. M. HILTEBEITEL. The Princeton University Library, 1902.

Die Einleitung von H. D. THOMPSON gibt bibliographische Notizen. Es folgt S. 1—44 die Übersetzung der Disq. gen. Beigegeben sind Übersetzungen der Selbstanzeige und der 1900 im achten Bande der Werke aus dem Nachlass herausgegebenen Neuen allgemeinen Untersuchungen über die krummen Flächen.

SCHLUSSBEMERKUNG.

Kurze Zeit nach dem Abdruck der vorstehenden Abhandlung in den *Materialien für eine wissenschaftliche Biographie von Gauss*, wurde der Verfasser PAUL STÄCKEL aus voller Schaffenskraft durch einen jähen Tod der Wissenschaft entrissen. — Seine grossen Verdienste um die Weiterführung der GAUSSausgabe vom VIII. Bande an und um die würdige Schilderung der Leistungen von GAUSS auf den verschiedenen Gebieten der Mathematik erfahren mit dem hier wiedergegebenen Aufsatz ihre Krönung. — Als es sich nun darum handelte, STÄCKELs Abhandlung über *Gauss als Geometer* in den Band X 2 der Werke einzufügen, konnte nur ein in allem Wesentlichen unveränderter Wiederabdruck aus den *Materialien* in Frage kommen. Der Unterzeichnete hat im Vereine mit FRIEDRICH ENGEL eine sorgfältige Durchsicht der Arbeit des dahingegangenen Freundes vorgenommen, wobei sich nur an einigen Stellen geringfügige Änderungen als erforderlich erwiesen haben. Es ist uns aber bekannt, dass STÄCKEL selbst die Absicht hatte, beim Wiederabdruck seines Aufsatzes in den Werken einen Punkt näher zu erörtern, den völlig aufzuklären ihm bei der Abfassung noch nicht gelungen war. Es handelt sich nämlich darum, welche Bedeutung GAUSS der Ausmessung des Dreiecks Brocken, Hohenhagen, Inselsberg in bezug auf die Frage beigelegt hat, ob man die Euklidische oder eine nichteuklidische Geometrie als theoretische Grundlage für die Messungen auf der Erde und am Himmel anzunehmen habe. — Da sich im Nachlasse STÄCKELs keine Aufzeichnung über diese Frage gefunden hat, so müssen wir uns damit begnügen, diejenigen Stellen aus SARTORIUS VON WALTERSHAUSENs Schrift *Gauss zum Gedächtnis* hier wiederzugeben, die sich darauf beziehen.

SARTORIUS, S. 53.

». . . Das Heliotrop fand sogleich bei der Hannöverschen Triangulation seine volle Anwendung und das grosse Dreieck, vielleicht das grösste, welches gemessen worden ist, nämlich zwischen dem Brocken, dem Inselsberg und dem Hohenhagen, wurde mit Hilfe desselben so genau gemessen, dass die Summe der drei Winkel nur um etwa zwei Zehnteile einer Sekunde sich von zwei Rechten entfernt.«

SARTORIUS, S. 81.

». . . Die Geometrie betrachtete GAUSS nur als ein konsequentes Gebäude, nachdem die Parallelentheorie als Axiom an der Spitze zugegeben sei; er sei indes zur Überzeugung gelangt, dass dieser Satz nicht bewiesen werden könne, doch wisse man aus der Erfahrung, z. B. aus den Winkeln des Dreiecks Brocken, Hohenhagen, Inselsberg, dass er näherungsweise richtig sei. Wolle man dagegen das genannte Axiom nicht zugeben, so folge daraus eine selbständige Geometrie, die er gelegentlich ein Mal verfolgt und mit dem Namen Antieuklidische Geometrie bezeichnet habe.«

Hierzu ist noch die oben S. 33 abgedruckte Stelle aus GAUSS' Brief an TAURINUS vom 8. November 1824 zu vergleichen.

SCHLESINGER.

Inhaltsverzeichnis.

V. Die allgemine Lehre von den krummen Flächen.